

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДО
_____ С.И. Качин

« _____ » _____ 2011 г.

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
240100 «Химическая технология»,
241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии,
нефтехимии и биотехнологии»,
150700 «Машиностроение»

Составители

В.И. Рожкова, Е.А. Молдованова

Семестр	1
Кредиты	4
Лекции, часов	6
Практические занятия, часов	8
Индивидуальные задания	№1, №2, №3, №4
Самостоятельная работа, часов	94
Формы контроля	зачёт

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 517

Линейная алгебра и аналитическая геометрия: метод. указ. и индивид. задания для студентов ИДО, обучающихся по напр. 240100 «Химическая технология», 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 150700 «Машиностроение» / сост. В.И. Рожкова, Е.А. Молдованова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 140 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики ФТИ «___» _____ 2011 г., протокол № ____.

Зав. кафедрой ВМ

профессор, доктор физ.-мат. наук _____ К.П. Арёфьев

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 240100 «Химическая технология», 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 150700 «Машиностроение». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приведены содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий и список рекомендуемой литературы. Приведены варианты заданий для индивидуальных домашних работ. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних работ.

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «**Линейная алгебра и аналитическая геометрия**» **М 1.1.1** входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла объединенного блока образовательных программ М1-М4. Эта дисциплина является необходимой для освоения остальных дисциплин математического и естественнонаучного цикла и дисциплин профессионального цикла ООП.

Пререквизиты. Для освоения дисциплины необходимо **знать**:

- курс средней общеобразовательной школы «Алгебра и начала анализа»,
- курс средней общеобразовательной школы «Геометрия».

Кореквизиты. Параллельно с данной дисциплиной могут изучаться дисциплины гуманитарного, социального и экономического цикла, дисциплины естественнонаучного цикла, профессионального цикла и цикл «Физическая культура».

Знание содержания дисциплины необходимо для освоения остальных дисциплин математического и естественнонаучного цикла и дисциплин профессионального цикла ООП.

В результате освоения модуля **линейная алгебра и аналитическая геометрия М 1.1.1**

студент должен будет:

Знать

- место модуля «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» среди других изучаемых дисциплин и её значение при изучении последующих курсов;
- алгебру матриц, основные характеристики матриц, их определения и свойства;
- методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
- методы векторной алгебры;
- основы теории линейных пространств и линейных операторов;
- свойства и уравнения основных геометрических образов.

Уметь

- вычислять определители n -го порядка различными способами;
- вычислять ранг матрицы различными способами;
- исследовать системы линейных алгебраических уравнений; решать системы методами Крамера, Гаусса, с помощью обратной матрицы;
- находить фундаментальную систему решений однородной системы уравнений;
- находить базис и размерность линейного пространства;

- производить действия над векторами в пространствах R^n и находить разложение произвольного вектора по любому базису;
- решать задачи на собственные значения и собственные векторы;
- геометрически и аналитически представлять прямую и плоскость в пространстве R^3 ;
- использовать аппарат векторной алгебры для анализа взаимного положения прямых и плоскостей;
- приводить общие уравнения прямой в пространстве к каноническому виду;
- выводить канонические уравнения кривых второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола);
- приводить общее уравнение кривой второго порядка к каноническому виду;
- применять методы линейной алгебры и аналитической геометрии к решению инженерных, исследовательских и других профессиональных задач.

Владеть

- математической символикой для выражения количественных и качественных отношений объектов,
- скалярным, векторным, смешанным и двойным векторным произведением векторов.
- использованием их основных свойств, геометрическим и физическим смыслом.
- уравнениями основных геометрических образов – на плоскости и в пространстве;
- математическим аппаратом для описания, анализа, теоретического и экспериментального исследования и моделирования физических и химических систем, явлений и процессов, использования в обучении и профессиональной деятельности

В процессе освоения модуля дисциплины у студента развиваются следующие компетенции:

1. Универсальные (общекультурные)

- способность владеть культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);
- способность логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);
- представлять современную картину мира на основе целостной системы естественнонаучных и математических знаний, ориентироваться в ценностях бытия, жизни, культуры (ОК-3);

- способность к личностному развитию и повышению профессионального мастерства (ОК-4);

2. Профессиональные

- способность демонстрировать базовые знания в области естественнонаучных дисциплин и готовность использовать основные законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1);
- способность и готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ПК-2);
- способность и готовность анализировать научно-техническую информацию, изучать отечественный и зарубежный опыт по тематике исследования (ПК-3)
- способность использовать методы анализа и моделирования линейных и нелинейных электрических цепей постоянного и переменного тока (ПК-4);
- способность к обучению на втором уровне высшего профессионального образования, получению знаний по одному из профилей в области научных исследований и педагогической деятельности (ПК-5);
- способность выполнять экспериментальные исследования по заданной методике, обрабатывать результаты экспериментов (ПК-6);
- использовать физико-математический аппарат для решения расчётно-аналитических задач, возникающих в ходе профессиональной деятельности (ПК-7).

Критерий 5 АИОР

1.1. Применять *базовые и специальные* математические, естественнонаучные, социально-экономические и профессиональные знания в *широком* (в том числе междисциплинарном) контексте в *комплексной* инженерной деятельности.

1.2. Ставить и решать задачи *комплексного* инженерного анализа с использованием *базовых и специальных* знаний, современных аналитических методов и моделей.

1.3. Выполнять *комплексные* инженерные проекты с применением *базовых и специальных* знаний, *современных* методов проектирования для достижения *оптимальных* результатов, соответствующих техническому заданию с учетом экономических, экологических, социальных и других ограничений.

1.4. Проводить *комплексные* инженерные исследования, включая поиск необходимой информации, эксперимент, анализ и интерпретацию

данных с применением *базовых и специальных* знаний и *современных* методов для достижения требуемых результатов.

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Линейная алгебра

Матрицы. Основные понятия и определения, основные виды матриц. Операции над матрицами. Определители 2, 3, n -го порядков и их свойства. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы. Решение матричных уравнений. Формулы Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Способы вычисления ранга матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений, основные понятия и определения. Совместность систем линейных алгебраических уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Методы нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений (метод Крамера, метод Гаусса, матричный метод). Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Основные понятия и определения. Фундаментальная система решений. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Размерность и базис линейного пространства. Линейный оператор, матрица оператора. Задача на собственные значения.

Рекомендуемая литература: [1, глава 1].

Методические указания

Изучение данной темы начните с просмотра видео-лекции «Линейная алгебра». После этого попробуйте ответить на вопросы для самоконтроля. Если вопросы не вызвали затруднений, можно переходить к разбору задач, решённых в пособии [1]. В противном случае обратитесь к рекомендованной литературе и попробуйте найти ответы на вопросы.

Основной раздел этой темы – решение систем линейных уравнений. Вычисление определителей рекомендуется изучать одновременно с методом Крамера. Обратите внимание, что этот метод используется только для решения систем линейных уравнений, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. После рассмотрения обратной матрицы можно сразу же перейти к матричному методу решения систем линейных уравнений. Особенно тщательно следует разобрать метод Гаусса (метод исключения неизвестных), так как он является универсальным методом решения систем линейных уравнений. Применение метода Гаусса не зависит ни от числа уравнений, ни от числа неизвестных в системе. При освоении метода Гаусса затруднения может

вызвать приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Чаще всего именно на этом этапе решения задач допускаются ошибки. При решении неопределённых систем линейных уравнений надо быть внимательным при выборе базисных и свободных неизвестных. Не забывайте делать проверку после того, как решите систему.

Однородные системы линейных уравнений всегда совместны. Поэтому начинать решение однородной системы необходимо с выяснения, имеет ли данная система ненулевые решения или нет.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое определитель квадратной матрицы?
2. При каких преобразованиях величина определителя не меняется?
3. В каких случаях определитель равен нулю?
4. Что следует из равенства определителя нулю?
5. Что такое дополнительный минор элемента определителя?
6. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
7. Как осуществляются линейные операции над матрицами?
8. Для каких двух матриц определяется сумма?
9. Для каких двух матриц определяется произведение?
10. Как перемножаются две матрицы?
11. Какими свойствами обладают линейные операции над матрицами?
12. Что такое транспонирование матрицы?
13. Какая матрица называется невырожденной?
14. Какая матрица называется обратной для данной матрицы?
15. Для каких матриц существуют обратные матрицы?
16. Сколько обратных матриц может иметь матрица?
17. Какова схема нахождения обратной матрицы?
18. Какая система уравнений называется линейной?
19. Какая система линейных уравнений называется однородной?
20. Что такое решение системы линейных алгебраических уравнений.
21. Что означают понятия «совместная», «несовместная», «определённая», «неопределённая» системы?
22. Какой вид имеют формулы Крамера?
23. В каком случае применимы формулы Крамера?
24. Какие действия называются элементарными преобразованиями матрицы?
25. Что называется рангом матрицы?
26. Как находится ранг матрицы?

27. При каких условиях система линейных алгебраических уравнений имеет множество решений?
28. При каких условиях система линейных уравнений имеет единственное решение?
29. При каких условиях система линейных уравнений совместна?
30. При каких условиях система линейных уравнений несовместна?
31. Какие неизвестные называются свободными, а какие базисными?
32. Какие особенности решения однородных систем линейных алгебраических уравнений?
33. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной?
34. Какое решение однородной системы линейных уравнений называется нетривиальным?
35. При каких условиях однородная система линейных уравнений имеет нетривиальные решения?
36. Как строится фундаментальная система решений?
37. Что такое общее решение системы линейных уравнений?
38. Что такое частное решение системы линейных уравнений?
39. При каком условии однородная система линейных уравнений имеет фундаментальную систему решений?
40. Сколько частных решений содержит фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений?

Тема 2. Векторная алгебра

Определение вектора как элемента линейного пространства. Линейные операции над векторами. Скалярное, векторное, смешанное и двойное векторное произведения векторов, их основные свойства, геометрический и физический смысл. Координатное выражение произведений векторов.

Рекомендуемая литература: [1, глава 2].

Методические указания

Изучение данной темы начните с просмотра видео-лекции «Векторная алгебра». После этого попробуйте ответить на вопросы для самоконтроля. Если вопросы не вызвали затруднений, можно переходить к разбору задач, решённых в пособии [1]. В противном случае обратитесь к рекомендованной литературе и попробуйте найти ответы на вопросы.

Эта небольшая по содержанию тема имеет важное значение. Геометрические векторы известны ещё из школьной программы. Новые понятия – линейная зависимость векторов, линейная независимость векто-

ров – могут вызывать затруднения. Эти понятия предназначены для аналитического описания различных случаев взаимного расположения векторов: коллинеарности, компланарности, принадлежности пространству. И наоборот, коллинеарность, компланарность, принадлежность пространству являются геометрическими характеристиками линейной зависимости векторов. Кроме уже известных линейных операций над векторами вводятся новые операции: скалярное произведение двух векторов, векторное произведение двух векторов, смешанное и двойное векторное произведения трёх векторов. Обратите внимание, что в результате скалярного умножения получается число, а в результате векторного умножения получается вектор. В декартовой системе координат формулы для вычисления скалярного, векторного и смешанного произведения векторов имеют самый простой вид. При решении задач воспользуйтесь таблицами в пособии [1].

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется направленным отрезком?
2. Какие два направленных отрезка называются эквивалентными?
3. Что называется свободным вектором и представителем вектора?
4. Что такое модуль вектора?
5. Какие два вектора называются ортогональными?
6. Какие два вектора называются коллинеарными?
7. Какие векторы называются компланарными?
8. Что называется суммой двух векторов?
9. Какие операции над векторами называются линейными?
10. Какими свойствами обладают линейные операции над векторами?
11. Что называется линейной комбинацией векторов?
12. Какие векторы называются линейно зависимыми?
13. Какие векторы называются линейно независимыми?
14. Что называется базисом на плоскости?
15. Что называется базисом в пространстве?
16. Какой базис называют декартовым?
17. Что называется разложением вектора по базису на плоскости?
18. Что называется разложением вектора по базису в пространстве?
19. Что такое координаты вектора в заданном базисе?
20. В чём заключается необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых векторов?
21. Что называется скалярным произведением двух векторов?
22. Как выражается скалярное произведение через координаты векторов в декартовой системе координат?
23. Каковы свойства скалярного произведения векторов?

24. Для решения каких задач может быть использовано скалярное произведение векторов?
25. В чём заключается необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов?
26. Что называется направляющими косинусами вектора?
27. В каком случае скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю?
28. Что называется векторным произведением векторов?
29. Как выражается векторное произведение через координаты векторов в декартовой системе координат?
30. Каковы свойства векторного произведения векторов?
31. Для решения каких задач может быть использовано векторное произведение векторов?
32. Каков геометрический смысл модуля векторного произведения векторов?
33. В каком случае векторное произведение двух ненулевых векторов равно нуль-вектору?
34. Что называется смешанным произведением трёх векторов?
35. Каковы свойства смешанного произведения векторов?
36. Для решения каких задач может быть использовано смешанное произведение векторов?
37. В каком случае смешанное произведение трёх ненулевых векторов равно нулю?
38. Запишите в векторной и координатной формах условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов.
39. Как выражается смешанное произведение через координаты векторов в декартовой системе координат?
40. Каков геометрический смысл модуля смешанного произведения векторов?

Тема 3. Аналитическая геометрия

Общие понятия о линии, поверхности. Уравнения линий и поверхностей. Полярные координаты. Прямая на плоскости. Различные формы уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве. Уравнения плоскости и уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей. Геометрические определения кривых второго порядка (эллипс, гипербола, парабола). Вывод канонических уравнений этих кривых, построение кривых второго порядка по их каноническому уравнению. Преобразование декартовых координат на плоскости. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому

виду. Поверхности второго порядка (эллипсоид, параболоиды, гиперболоиды, цилиндр, конус), их канонические уравнения. Метод сечений в исследовании формы поверхностей. Квадратичные формы. Матрица квадратичной формы. Приведение общего уравнения кривой и поверхности второго порядка к каноническому виду.

Рекомендуемая литература: [1, главы 3–4].

Методические указания

Изучение данной темы начните с просмотра видео-лекций «Аналитическая геометрия на плоскости», «Аналитическая геометрия в пространстве», «Кривые второго порядка» и «Поверхности второго порядка». После этого попробуйте ответить на вопросы для самоконтроля. Если вопросы не вызвали затруднений, можно переходить к разбору задач, решённых в пособии [1]. В противном случае обратитесь к рекомендованной литературе и попробуйте найти ответы на вопросы.

Понимание аналитической геометрии невозможно без освоения предыдущих двух тем. Основным предметом изучения аналитической геометрии являются линии и поверхности. При этом каждой точке плоскости сопоставляется пара чисел (её координаты), каждой линии на плоскости – уравнение, связывающее текущие координаты; аналогично в пространстве каждой точке сопоставляется три числа, каждой поверхности – уравнение, каждой линии – два уравнения. Благодаря этому геометрические факты могут быть переведены на язык алгебры, геометрические задачи могут быть решены приёмами алгебры, после чего результат при помощи обратного перехода вновь истолковывается на геометрическом языке. При изучении линий и поверхностей методом координат возникают две задачи: 1. по геометрическим свойствам данной линии (поверхности) найти её уравнение; 2. по заданному уравнению линии (поверхности) исследовать её геометрические свойства.

Составление уравнений прямых на плоскости, уравнений плоскостей и прямых в пространстве основано на описании взаимного расположения векторов. При этом следует помнить, что прямая в пространстве задаётся как линия пересечения плоскостей, т.е. двумя уравнениями первой степени.

При построении поверхностей второго порядка рекомендуется использовать метод параллельных сечений.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид имеет общее уравнение прямой на плоскости?
2. Каков геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении прямой?

3. Какой вектор называется нормальным вектором прямой?
4. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
5. Какое уравнение прямой на плоскости называется каноническим?
6. Что такое угловой коэффициент прямой?
7. Уравнения каких прямых не могут быть записаны в виде уравнения с угловым коэффициентом?
8. Как записывается условие параллельности двух прямых на плоскости?
9. Как записывается условие перпендикулярности двух прямых на плоскости?
10. Как определить взаимное расположение двух прямых на плоскости?
11. Как найти точку пересечения двух прямых на плоскости?
12. Как найти угол между двумя прямыми на плоскости?
13. Как вычисляется расстояние от точки до прямой на плоскости?
14. Какие линии называются кривыми второго порядка?
15. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса?
16. Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболы?
17. Какой вид имеет каноническое уравнение параболы?
18. Какой вид имеет каноническое уравнение окружности?
19. Какова схема приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду?
20. Какой вид имеет общее уравнение плоскости?
21. Каков геометрический смысл коэффициентов при неизвестных в общем уравнении плоскости?
22. Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?
23. Как определить взаимное расположение двух плоскостей?
24. Как определить взаимное расположение трёх плоскостей?
25. Как вычисляется расстояние от точки до плоскости?
26. Какими способами можно задать прямую в пространстве?
27. Какова схема приведения общих уравнений прямой к каноническому виду?
28. Как определить взаимное расположение двух прямых в пространстве?
29. Как вычисляется расстояние от точки до прямой в пространстве?
30. Как определить взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?
31. Как найти угол между прямой и плоскостью?
32. Как найти точку пересечения прямой и плоскости?

33. Как найти расстояние между параллельными прямыми в пространстве?
34. Как найти расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве?
35. Как задаётся полярная система координат на плоскости?
36. Как определяются координаты точки в полярной системе координат?
37. Как связаны координаты точки в полярной системе координат с координатами той же точки в декартовой системе координат?
38. Какую особенность имеет уравнение цилиндрической поверхности?
39. Какая поверхность называется поверхностью вращения?
40. Какая поверхность называется конической?

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Решение систем линейных уравнений (2 часа).
2. Действия с векторами (2 часа).
3. Аналитическая геометрия на плоскости (2 часа).
4. Аналитическая геометрия в пространстве (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком для студентов, обучающихся по направлениям 240100 «Химическая технология», 241000 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», 150700 «Машиностроение», предусмотрено выполнение четырёх индивидуальных домашних заданий. Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Студент выполняет вариант, номер которого совпадает с двумя последними цифрами шифра его зачётной книжки. Если две последние цифры превосходят число 20, то следует вычесть число кратное двадцати. Например, если номер зачетной книжки 3-2K11/14, но студент выбирает вариант индивидуального домашнего задания под номером 14, если шифр 3-2K11/26, то выбирать надо вариант под номером 6, если шифр 3-1B11/35, то выбирать надо вариант под номером 5.

Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и высылаются на проверку преподавателю. Все задания должны быть сданы и прорецензированы до начала экзамена-

ционной сессии. Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, в обязательном порядке получают письменную рецензию на каждое индивидуальное задание. Работы студенту не возвращаются.

При оформлении необходимо соблюдать следующие требования:

1. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно: в отдельной тетради для студентов, обучающихся по классической заочной форме (КЗФ), и в отдельном файле для студентов, обучающихся с использованием дистанционных образовательных технологий (ДОТ).

2. Обязательно должен быть титульный лист. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр.

3. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.

4. Обязательно прилагается список использованной литературы, в который включается рабочая программа и методические указания, в соответствии с которыми выполнены задания.

5. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания. Перед решением следует записать текст условия задачи.

6. Решения всех задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.

7. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению студент получает оценку «незачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена на проверку преподавателю.

8. Студент, не получивший положительной аттестации по всем индивидуальным заданиям, не допускается к сдаче зачёта по данной дисциплине.

4.2. Варианты домашних заданий и методические указания

4.2.1. Индивидуальное задание № 1

Вариант № 1

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 4

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 5

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 14 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 3x_5 = -6. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 6

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 13 & 2 & 6 & 4 \\ 18 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 19, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 11, \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 13. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 7

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & -2 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 12 & -4 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 8

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 10

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 11

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Найдите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 3x + 5y - z = 0, \\ 2x - 4y + 2z = -12. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 12

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & -8 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & & & & = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 & & & & = 4, \\ & x_2 + x_3 + x_4 & & & = -3, \\ & & x_3 + x_4 + x_5 & & = 2, \\ & & & x_4 + x_5 & = -1. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 13

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 10, \\ x + 4y - 13z = -27, \\ 12x + 5y - 7z = -23. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 14

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведение матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} - 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 14, \\ x + 4y + 3z = -7, \\ 2x + 6y = 10. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 15

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x - 2y + z = -8, \\ 2x + 3y + z = -1, \\ x + 2y + 6z = -5. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 16

1. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -10 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5, \\ 2x + 3y + 2z = 2, \\ 5x - y = 15. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 17

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X - 2 \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -3, \\ 7y + 11z = 1, \\ -x + 3y + 7z = 2. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №18

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -3, \\ 2x + y - 5z = -7, \\ 3x + 5y - z = -8. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_3 & +2x_5 & = & 1, \\ & x_2 & & +x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & +x_2 & & +2x_4 & +x_5 & = & 1, \\ & 3x_2 & & +3x_4 & & = & 0. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 19

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & -8 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + 4y - z = -3, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 4x - 7y + 2z = 35. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 20

1. Вычислите определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера,

б) матричным методом,

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x + y - z = 9, \\ 5x - 2y = -3, \\ 3x + 2y - 2z = 19. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

4.2.2. Решение типового варианта и образец оформления

Индивидуальное задание № 1

Вариант № 0

Задача 1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение

Получим нули в четвёртом столбце определителя. Для этого выполним следующие преобразования:

1) из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки;

2) к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки;

3) из элементов четвёртой строки вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на два.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по четвёртому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка получим нули в первом столбце. Для этого из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки:

$$- \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Запишем разложение определителя по первому столбцу

$$- \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-9 \cdot (-5) - 7 \cdot 7) = -2 \cdot (-4) = 8.$$

Ответ: 8

Задача 2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Умножать можно матрицы при условии, что число столбцов в первом множителе равно числу строк во втором множителе. Матрица $\mathbf{A}$ имеет размерность 2×3 , матрица $\mathbf{B}$ имеет размерность 3×2 . Следовательно, оба произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ имеют смысл. При этом матрица $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ имеет размерность 2×2 , а матрица $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ имеет размерность 3×3 . Находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 & -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \\ 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}. \\
 \text{Ответ: } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Задача 3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Сначала упростим уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Получили уравнение вида $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Решение находим по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 2) = 7 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \text{ существует.}$$

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы $\mathbf{A}$ по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – дополнительный минор элемента a_{ij} .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3.$$

Записываем обратную матрицу по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим решение матричного уравнения

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-7) \\ -2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 & -2 \cdot (-7) + 3 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -14 \\ -9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{7} & -2 \\ -\frac{9}{7} & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{24}{7} & -2 \\ -\frac{9}{7} & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Решите систему уравнений тремя способами: а) методом Крамера; б) матричным методом; в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 22. \end{cases}$$

Решение

а) Метод Крамера

Формулы Крамера имеют вид $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1; 2; 3$, $\Delta = \det \mathbf{A}$ – основной определитель системы, Δ_i – определитель, полученный из определителя системы Δ заменой столбца из коэффициентов при x_i столбцом из свободных членов.

Сначала находим основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -18 \\ 6 & 4 & -29 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -18 \\ 4 & -29 \end{vmatrix} = 87 + 72 = 159 \neq 0 \Rightarrow$$

Система имеет единственное решение (по теореме Крамера).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -7 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 22 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 27 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 27 & 9 \end{vmatrix} = -(-81 + 81) = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -11 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 22 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -29 & 27 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -8 & -9 \\ -29 & 27 \end{vmatrix} = -(-216 - 261) = 477,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -7 & -11 \\ 6 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -99 \\ 6 & 4 & -133 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -99 \\ 4 & -133 \end{vmatrix} = 399 + 396 = 795.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{159} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{477}{159} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{795}{159} = 5.$$

б) Матричный метод

Запишем данную систему в матричном виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Матричный способ решения системы линейных уравнений – это решение системы по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$.

$$\text{Найдём обратную матрицу } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как $\det \mathbf{A} = 159 \neq 0$ (см. пункт 4а), обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $\mathbf{A}$ по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 1 = -9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-35 + 2) = 33,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(30 - 1) = -29, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 2 = 18,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-4 + 7) = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7 + 4 = -3, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 12) = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 42 = 34.$$

Записываем обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{159} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 33 & -3 \\ -29 & 18 & 8 \\ -4 & -3 & 34 \end{pmatrix}.$$

Находим решение системы

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{159} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 33 & -3 \\ -29 & 18 & 8 \\ -4 & -3 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -1 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{159} \cdot \begin{pmatrix} 99 - 33 - 66 \\ 319 - 18 + 176 \\ 44 + 3 + 748 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{159} \cdot \begin{pmatrix} 99 - 33 - 66 \\ 319 - 18 + 176 \\ 44 + 3 + 748 \end{pmatrix} = \frac{1}{159} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 477 \\ 795 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

в) метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -7 & 2 & -11 \\ 6 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 6 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 2 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 4 & -29 & -133 \\ 0 & -3 & -18 & -99 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 4 & -29 & -133 \\ 0 & -1 & -6 & -33 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & -1 & -6 & -33 \\ 0 & 4 & -29 & -133 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & -1 & -6 & -33 \\ 0 & 0 & -53 & -265 \end{array} \right).$$

Выполнены следующие преобразования:

- 1) поменяли местами первую и третью строки;
- 2) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-6) ; к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-4) ;
- 3) элементы третьей строки разделили на 3;
- 4) вторую строку поменяли местами с третьей строкой;
- 5) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на 4.

Запишем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 22, \\ -x_2 - 6x_3 = -33, \\ -53x_3 = -265. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = \frac{-265}{-53} = 5$.

Подставим $x_3 = 5$ во второе уравнение

$$-x_2 - 6 \cdot 5 = -33,$$

откуда находим $x_2 = 33 - 30 = 3$.

Подставляем $x_3 = 5$ и $x_2 = 3$ в первое уравнение

$$x_1 - 3 + 5 \cdot 5 = 22 \Rightarrow x_1 = 22 - 22 = 0.$$

Проверка:
$$\begin{cases} 4 \cdot 0 - 7 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = -11, \\ -11 = -11 \\ 6 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 5 = -1, \\ -1 = -1 \\ 0 - 3 + 5 \cdot 5 = 22 \\ 22 = 22. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Задача 5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 15x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 3. \end{cases}$$

Решение

Выписываем расширенную матрицу системы и приводим её к ступенчатому виду

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 15 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -7 & 9 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} r(\mathbf{A}) = 2 \\ r(\mathbf{A}^*) = 2 \\ n = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{система совместна и имеет бесконечное множество}$$

решений.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$; Базисные неизвестные x_2, x_3 .

Свободные неизвестные x_1, x_4, x_5 . Записываем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$$

Полагаем $x_1 = C_1, x_4 = C_4, x_5 = C_5$. Тогда

$$\begin{cases} C_1 + x_2 + 3x_3 - 2C_4 + 3C_5 = 1, \\ -2x_3 + 3C_4 - 3C_5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5, \\ -2x_3 = -1 - 3C_4 + 3C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5 - 3x_3, \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_4 - \frac{3}{2}C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5 - 3\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_4 - \frac{3}{2}C_5\right), \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_4 - \frac{3}{2}C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} - C_1 - \frac{5}{2}C_4 + \frac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_4 - \frac{3}{2}C_5. \end{cases}$$

Общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = -\frac{1}{2} - C_1 - \frac{5}{2}C_4 + \frac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_4 - \frac{3}{2}C_5, \\ x_4 = C_4, \\ x_5 = C_5. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = -\frac{1}{2} - C_1 - \frac{5}{2}C_4 + \frac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_4 - \frac{3}{2}C_5, \\ x_4 = C_4, \\ x_5 = C_5. \end{cases}$$

Задача 6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Выпишем основную матрицу системы и найдём её ранг

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\mathbf{A}) = 2.$$

Были выполнены следующие преобразования:

1) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-4) ; к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-3) ;

2) поменяли местами вторую и третью строки;

3) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на (-3) .

Так как $r(\mathbf{A}) = 2 < n = 4$, то система имеет ненулевые решения.

$$\text{Базисный минор } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Базисные неизвестные x_1, x_2 .

Свободные неизвестные x_3, x_4 .

Записываем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = C_3$, $x_4 = C_4$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4C_3 + 3C_4, \\ -x_2 = 6C_3 - 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4C_3 + 3C_4 - 2x_2, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4C_3 + 3C_4 - 2(-6C_3 + 5C_4), \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4C_3 - 7C_4, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4. \end{cases}$$

Общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 4C_3 - 7C_4, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4, \\ x_3 = C_3, \\ x_4 = C_4. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $E_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{X} = C_1 \mathbf{E}_1 + C_2 \mathbf{E}_2 = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2.3. Индивидуальное задание № 2

Вариант № 1

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{4; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{5; 3; -2\}$, $\vec{c} = \{3; 2; -1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; 1; 1)$, $B(4; 5; -3)$ и $|AB| : |CB| = 5 : 2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(6; -7; 2)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{5; 0; -12\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 5$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 14\sqrt{5}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; 1; 2)$, $D(0; 1; 3)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы $\vec{e}_1 = \{4; 2; -1\}$, $\vec{e}_2 = \{5; 3; -2\}$, $\vec{e}_3 = \{3; 2; -1\}$, $\vec{x} = \{12; 7; -4\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 2

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{-3; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{c} = \{-2; 1; -1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = -3\vec{a} - 2\vec{b} + 7\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(0; -1; 2)$, $B(2; 1; -3)$ и $|AB| : |CB| = 2 : 3$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = \vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(3; 1; 4)$, $B(-1; 6; 1)$, $C(-1; 1; 6)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -4; -3\}$ и $\vec{b} = \{3; 2; -4\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{b}$ и $(\vec{x}, \vec{a}) = 3$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; 5; 3\}$ и $\vec{b} = \{-6; -1; 4\}$, образует с осью Oz тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 3; 2)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(3; 2; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{5; 3; 5\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 0; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 1; -1\}$, $\vec{x} = \{9; 6; 8\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 3

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{-1; 0; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 3\}$, $\vec{c} = \{2; -2; 4\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ и $|AB| : |CB| = 2 : 5$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(1; -3; -1)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 5; 1\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 4$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-1; 3; -2\}$ и $\vec{b} = \{4; 2; 1\}$, образует с осью Oz острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{6}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1; 0; -1)$, $B(4; 2; 0)$, $C(1; 0; 1)$, $D(5; 1; 2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{3; 2; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 3; 1\}$, $\vec{e}_3 = \{-1; -3; -1\}$, $\vec{x} = \{2; 1; 1\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 4

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 1; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 3\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; 2; -1)$, $B(3; -3; 2)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = -2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$, $C(-5; 14; -3)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{3; 4; -3\}$ и $\vec{b} = \{4; -5; -3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{b}$ и $(\vec{x}, \vec{a}) = 8$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{1; 3; 6\}$ и $\vec{b} = \{5; 3; -2\}$, образует с осью Oy тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 3$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1; 1; 1)$, $B(4; 3; 2)$, $C(1; 1; 3)$, $D(5; 2; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{1; 2; 3\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 3; 1\}$, $\vec{e}_3 = \{1; 1; -3\}$, $\vec{x} = \{2; 4; 1\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Вариант № 5

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 5; -2\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 7\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(3; 1; 1)$, $B(2; -1; 3)$ и $|AB| : |CB| = 4 : 3$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$, $C(-7; 11; 6)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{4; 1; -2\}$ и $\vec{b} = \{-6; 7; 7\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 2$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{9; 3; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; -1; -2\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 3)$, $C(3; -2; 0)$, $D(2; -3; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{9; 3; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 0; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 1; -1\}$, $\vec{x} = \{-11; -7; 1\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Вариант № 6

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{4; 0; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{0; 2; 1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(0; 1; 3)$, $B(-2; 2; 4)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 4$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(3; -2; 0)$, $B(2; -3; -1)$, $C(-5; 0; -1)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 4; 3\}$ и $\vec{b} = \{1; 3; 0\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{5; -3; 6\}$ и $\vec{b} = \{1; 0; 7\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 1$.

7. Даны вершины пирамиды $A(-1; 2; -3)$, $B(4; -1; 0)$, $C(2; 1; -2)$, $D(-7; 0; -1)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{5; 1; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{2; -1; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{1; 0; -1\}$, $\vec{x} = \{13; 2; 7\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 7

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; -2; -3\}$, $\vec{b} = \{1; -5; -4\}$, $\vec{c} = \{-3; -1; 2\}$.
Найдите:
 - а) вектор $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
 - б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;
 - в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;
 - г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-1; 4; 3)$, $B(0; 2; 0)$ и $|AB| : |CB| = 1 : 2$.
3. Найдите модули векторов $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.
4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(-3; 3; 1)$, $B(-1; 3; -1)$, $C(-2; 7; -2)$.
Найдите:
 - а) координаты четвёртой вершины D ;
 - б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
 - в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .
5. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 5; 1\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -3$.
6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{0; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{2; 0; 6\}$, образует с осью Ox тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{7}$.
7. Даны вершины пирамиды $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .
8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{1; 0; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{1; -2; 0\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 3; 1\}$, $\vec{x} = \{2; 7; 5\}$.
 - а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;
 - б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 8

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 4\}$, $\vec{c} = \{-2; 0; -1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(0; -3; 5)$, $B(2; 4; -2)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(5; -1; 1)$, $B(2; -3; -1)$, $C(-2; 2; 1)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 14$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{0; -3; -2\}$ и $\vec{b} = \{2; 0; 3\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 6$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1; 5; -7)$, $B(-3; 6; 3)$, $C(-2; 7; 3)$, $D(1; -1; 2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{1; 0; 2\}$, $\vec{e}_2 = \{0; 1; 1\}$, $\vec{e}_3 = \{2; -1; 4\}$, $\vec{x} = \{3; -3; 4\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Вариант № 9

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{0; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -3; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 5; 3\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-2; 3; 1)$, $B(5; -2; -4)$ и $|AB|:|CB| = 5:3$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 5\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(2; 3; -7)$, $B(1; 8; -6)$, $C(2; 6; -7)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -14$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-3; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{-1; 0; 2\}$, образует с осью Oz острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{6}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-1; 2; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{2; 1; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{1; -1; 2\}$, $\vec{e}_3 = \{2; 2; -1\}$, $\vec{x} = \{3; 7; -7\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 10

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 3; -4\}$, $\vec{c} = \{5; 0; 1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; 6)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 5$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(2; 3; -7)$, $B(1; 8; -6)$, $C(2; 6; -7)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{0; 2; 3\}$ и $\vec{b} = \{-12; 0; 5\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \perp \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 3$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-1; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; 1\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{2}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1; -5; 4)$, $B(0; -3; 1)$, $C(-2; -4; 3)$, $D(4; 4; -2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{0; 1; 5\}$, $\vec{e}_2 = \{3; -1; 2\}$, $\vec{e}_3 = \{-1; 0; 1\}$, $\vec{x} = \{8; -7; 13\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант № 11

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 1; 4\}$, $\vec{b} = \{0; -3; 2\}$, $\vec{c} = \{2; 1; -1\}$.

Найдите:

- а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$;
- б) скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$;
- в) векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$;
- г) смешанное произведение векторов $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(2; -3; 1)$, $B(-2; 2; -4)$ и $|AC| : |CB| = 5 : 2$.

3. Найдите модули векторов $(3\vec{a} + 2\vec{b})$ и $(3\vec{a} - 2\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(3; 0; -3)$, $B(-8; 2; 0)$, $C(0; 3; -4)$. Найдите:

- а) координаты четвертой вершины D ,
- б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$ и $\vec{b} = \{5; 0; -12\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -9$.

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-3; -5; 1\}$ и $\vec{b} = \{-2; 6; 2\}$, если $(\vec{x}, \vec{j}) \leq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(2; 0; 6)$, $D(-2; 5; 1)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{0; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{5; -3; 2\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{15; -20; -1\}$ в этом базисе.

Вариант № 12

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 1; 1\}$, $\vec{c} = \{4; -1; 5\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{b})$
- векторное произведение векторов $[(\vec{a} + \vec{c}), (\vec{b} - \vec{a})]$
- смешанное произведение векторов $([\vec{c}, \vec{a}], \vec{b})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(6; 1; 5)$, $B(-1; 3; 0)$ и $|AC| : |CB| = 2 : 1$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(2\vec{a} - 3\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(1; -2; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; -4; 5)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{-2; 4; 1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 7\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 6$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-3; 1; 1\}$ и $\vec{b} = \{4; 2; 3\}$, если $(\vec{x}, \vec{k}) \geq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды

$A(0; 5; 0)$, $B(2; 3; -4)$, $C(0; 0; -6)$, $D(-3; 1; -1)$.

Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{-1; 2; 4\}$

образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{-2; 4; 7\}$ в этом базисе.

Вариант № 13

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; 1; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{0; 1; -1\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{c}, \vec{b}], \vec{a})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; -1; 6)$, $B(4; 5; -2)$ и $|AC| : |CB| = 3 : 2$

3. Найдите модули векторов $(\vec{a} - 3\vec{b})$ и $(\vec{a} + 3\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(0; -3; 6)$, $B(-12; -3; -3)$, $C(-9; -3; -6)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{5; 0; -1\}$ и $\vec{b} = \{7; 2; 3\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 16$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{4; -2; 3\}$ и $\vec{b} = \{3; -5; 4\}$, если $(\vec{x}, \vec{i}) \leq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(-5; 6; -1)$, $B(6; -5; 2)$, $C(6; 5; 1)$, $D(0; 0; 2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; 3; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$, $\vec{c} = \{1; 0; 1\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{2; 7; 5\}$ в этом базисе.

Вариант № 14

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{-1; 1; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 3; 1\}$, $\vec{c} = \{2; -1; -1\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = 2\vec{c} - \vec{a} + 3\vec{b}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{b}, \vec{a}], \vec{c})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-1; 3; 0)$, $B(1; -1; 5)$ и $|AC| : |CB| = 3 : 5$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + \vec{b})$ и $(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(3; 3; -1)$, $B(5; 5; -2)$, $C(4; 1; 1)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{-2; -3; -2\}$ и $\vec{b} = \{1; 0; 5\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -6$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{3; 2; -1\}$ и $\vec{b} = \{7; 2; -3\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{k}) \geq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(7; 2; 2)$, $B(5; 7; 7)$, $C(5; 3; 1)$, $D(2; 3; 7)$. Найдите объем пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 3; 0\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{6; 12; -1\}$ в этом базисе.

Вариант № 15

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{5; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 5\}$, $\vec{c} = \{0; 5; -3\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a} - 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(2; 2; 5)$, $B(-2; 1; 0)$ и $|AC| : |CB| = 1 : 5$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + \vec{b})$ и $(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(-1; 2; -3)$, $B(3; 4; -6)$, $C(1; 1; -1)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{3; 5; 4\}$ и $\vec{b} = \{5; -9; 7\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{0; 8; 3\}$ и $\vec{b} = \{3; 5; 1\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{j}) \leq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(3; 5; 4)$, $B(8; 7; 4)$, $C(5; 10; 4)$, $D(4; 7; 8)$.
Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{3; -1; 2\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{0; 1; 5\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{8; -7; -13\}$ в этом базисе.

Вариант № 16

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{c} = \{3; 0; -2\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = 2\vec{c} - 3\vec{b} + \vec{a}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{c} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; -2; 1)$, $B(3; 1; 2)$ и $|AC| : |CB| = 3 : 4$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + 5\vec{b})$ и $(2\vec{a} - 5\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(-4; -2; 0)$, $B(-1; -2; 4)$, $C(3; -2; 1)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{7; 9; -2\}$ и $\vec{b} = \{5; -4; 3\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 14$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-1; 2; 8\}$ и $\vec{b} = \{3; 7; -1\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{i}) \geq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(6; 0; 4)$, $B(0; 6; 4)$, $C(4; 6; 0)$, $D(0; -6; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{2; 1; -1\}$, $\vec{c} = \{1; -1; 1\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{1; -4; 4\}$ в этом базисе.

Вариант № 17

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; 1; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{0; 1; -1\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(8; 6; 4)$, $B(10; 5; 5)$ и $|AC| : |CB| = 3 : 7$

3. Найдите модули векторов $(4\vec{a} + \vec{b})$ и $(4\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(5; 3; -1)$, $B(5; 2; 0)$, $C(6; 4; -1)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{4; 2; 9\}$ и $\vec{b} = \{0; -1; 3\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -50$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{8; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{4; 1; 3\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{i}) \leq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды

$$A(6; 1; 5), B(-1; 3; 0), C(4; 5; -2), D(1; -1; 6).$$

Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{4; 0; 1\}$, $\vec{c} = \{3; 1; -1\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{0; -8; 9\}$ в этом базисе.

Вариант № 18

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{1; 1; -4\}$, $\vec{c} = \{4; 1; -5\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-2; 1; 2)$, $B(3; 2; 7)$ и $|AC| : |CB| = 4 : 2$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + 5\vec{b})$ и $(2\vec{a} - 5\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(-2; 1; 1)$, $B(2; 3; -2)$, $C(0; 0; 3)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -7; 10\}$ и $\vec{b} = \{4; 6; 1\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 30$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{4; 2; -7\}$ и $\vec{b} = \{5; 0; -3\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{i}) \geq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды

$$A(1; -1; 6), B(4; 5; -2), C(-1; 3; 0), D(1; -1; 5).$$

Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{2; 0; -3\}$, $\vec{b} = \{-1; 2; 1\}$, $\vec{c} = \{4; 1; 1\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{-9; 5; 5\}$ в этом базисе.

Вариант № 19

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; -1; 5\}$, $\vec{b} = \{2; 3; -4\}$, $\vec{c} = \{1; 2; 1\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{b})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{c}, \vec{b}], \vec{a})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(6; 3; 5)$, $B(5; -6; 3)$ и $|AC| : |CB| = 3 : 1$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(2\vec{a} - 3\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 60^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(3; 3; -1)$, $B(5; 1; -2)$, $C(4; 1; -3)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{-1; 3; 4\}$ и $\vec{b} = \{2; -1; 0\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 15$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{2; 3; -8\}$ и $\vec{b} = \{4; 1; -2\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{j}) \geq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(8; 6; 4)$, $B(10; 5; 5)$, $C(5; 6; 8)$, $D(8; 10; 7)$. Найдите ёёобъём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{2; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 0\}$, $\vec{c} = \{4; 1; 2\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{8; 0; 5\}$ в этом базисе.

Вариант № 20

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 1\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 1\}$.

Найдите:

- вектор $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}^0$
- скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$
- векторное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{c})$
- смешанное произведение векторов $([\vec{b}, \vec{a}], \vec{c})$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(4; 4; 10)$, $B(2; 8; 4)$ и $|AC| : |CB| = 2 : 6$

3. Найдите модули векторов $(2\vec{a} + \vec{b})$ и $(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
 $A(-4; 3; 0)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-2; 4; -2)$. Определите:

- координаты четвертой вершины D ,
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ,
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Даны векторы $\vec{a} = \{-2; 5; 3\}$ и $\vec{b} = \{7; 1; -2\}$.

Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -10$

6. Найдите единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{5; 1; -2\}$ и $\vec{b} = \{6; 0; 7\}$, если $(\vec{x} \wedge \vec{k}) \leq \pi/2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(7; 7; 3)$, $B(6; 5; 8)$, $C(3; 5; 8)$, $D(8; 4; 1)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

8. Докажите, что векторы $\vec{a} = \{0; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 4\}$, $\vec{c} = \{1; 0; 2\}$ образуют базис и найдите разложение вектора $\vec{x} = \{3; -3; 4\}$ в этом базисе.

4.2.4. Решение типового варианта и образец оформления

Индивидуальное задание № 2

Вариант № 0

Задача 1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; -3; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 8; -6\}$, $\vec{c} = \{2; -6; 7\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Решение

а) По правилам выполнения линейных операций над векторами получаем:

$$\begin{aligned}\vec{d} &= 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} = 3 \cdot \{2; -3; 7\} + \{1; 8; -6\} - 2 \cdot \{2; -6; 7\} = \\ &= \{6; -9; 21\} + \{1; 8; -6\} + \{-4; 12; -14\} = \{3; 11; 1\}.\end{aligned}$$

Модуль вектора находим по формуле $|\vec{d}| = \sqrt{(d_x)^2 + (d_y)^2 + (d_z)^2}$

$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 11^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 121 + 1} = \sqrt{131}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{d_x}{|\vec{d}|} = \frac{3}{\sqrt{131}}; \cos \beta = \frac{d_y}{|\vec{d}|} = \frac{11}{\sqrt{131}}; \cos \gamma = \frac{d_z}{|\vec{d}|} = \frac{1}{\sqrt{131}}.$$

$$\text{Орт вектора } \vec{d}_0 = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\} = \left\{ \frac{3}{\sqrt{131}}; \frac{11}{\sqrt{131}}; \frac{1}{\sqrt{131}} \right\}.$$

б) Сначала найдём координаты векторов $\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{b} - \vec{a}$:

$$\vec{a} + \vec{c} = \{2; -3; 7\} + \{2; -6; 7\} = \{4; -9; 14\},$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \{1; 8; -6\} - \{2; -3; 7\} = \{-1; 11; -13\}.$$

В декартовой системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ находим по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Получаем

$$(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}) = 4 \cdot (-1) + (-9) \cdot 11 + 14 \cdot (-13) = -4 - 99 - 182 = -285.$$

в) В декартовой системе координат векторное произведение векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ определяется формулой

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -9 & 14 \\ -1 & 11 & -13 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -9 & 14 \\ 11 & -13 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 14 \\ -1 & -13 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(117 - 154) - \vec{j}(-52 + 14) + \vec{k}(44 - 9) = \{-37; 38; 35\}.$$

г) Смешанное произведение трёх векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, $\vec{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$ в декартовой системе координат находим

по формуле $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 8 & -6 \\ 2 & -6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 3(-12 - 7) = -57.$$

Задача 2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-5; 3; -1)$, $B(2; 4; 4)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 2$.

Решение

Обозначим координаты неизвестной точки $C(x_C; y_C; z_C)$. Используем формулы деления отрезка AB точкой C в отношении λ

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}.$$

Получаем при $\lambda = \frac{3}{2}$

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} = \frac{-5 + \frac{3}{2} \cdot 2}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{(-5 + 3) \cdot 2}{5} = -\frac{4}{5};$$

$$y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} = \frac{3 + \frac{3}{2} \cdot 4}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{(3+6) \cdot 2}{5} = \frac{18}{5};$$

$$z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{2} \cdot 4}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{(-1+6) \cdot 2}{5} = 2.$$

Таким образом, $C\left(-\frac{4}{5}; \frac{18}{5}; 2\right)$.

Задача 3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

Решение

Длину вектора находим по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$.

Скалярное произведение двух векторов находим по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= |3\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{b})} = \sqrt{9(\vec{a}, \vec{a}) + 12(\vec{a}, \vec{b}) + 4(\vec{b}, \vec{b})} = \\ &= \sqrt{9|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) + 4|\vec{b}|^2} = \sqrt{9 \cdot 25 + 12 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 4} = \\ &= \sqrt{225 + 60 + 16} = \sqrt{301}. \\ |\vec{q}| &= |3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{b})} = \sqrt{9(\vec{a}, \vec{a}) - 12(\vec{a}, \vec{b}) + 4(\vec{b}, \vec{b})} = \\ &= \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\hat{\vec{a}, \vec{b}}) + 4|\vec{b}|^2} = \sqrt{9 \cdot 25 - 12 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 4} = \\ &= \sqrt{225 - 60 + 16} = \sqrt{181}. \end{aligned}$$

Задача 4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(2; 3; -7)$, $B(1; 8; -6)$, $C(2; 6; -7)$. Найдите:

- координаты четвёртой вершины D ;
- длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
- косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

Решение

а) Обозначим $D(x_D; y_D; z_D)$. По свойству параллелограмма $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \{-1; 5; 1\}$;
 $\overrightarrow{DC} = \{x_C - x_D; y_C - y_D; z_C - z_D\} = \{2 - x_D; 6 - y_D; -7 - z_D\}$.

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, равны их соответствующие координаты

$$\begin{aligned} -1 &= 2 - x_D, & x_D &= 2 + 1 = 3, \\ 5 &= 6 - y_D, & y_D &= 6 - 5 = 1, \\ 1 &= -7 - z_D, & z_D &= -7 - 1 = -8. \end{aligned} \Rightarrow$$

Следовательно, $D(3; 1; -8)$.

б) Длину h высоты параллелограмма, опущенной из вершины D , найдём, используя формулы для нахождения площади параллелограмма

$$S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h \text{ и } S = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right|.$$

$$\text{Откуда } h = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

Сначала находим координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ и векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]$:

$$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A\} = \{1; -2; -1\},$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-5 + 2) - \vec{j}(1 - 1) + \vec{k}(2 - 5) = \{-3; 0; -3\}.$$

$$\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 25 + 1} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Следовательно, } h = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

в) Чтобы найти косинус угла между диагоналями параллелограмма, найдём координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Затем воспользуемся формулой:

$$\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}.$$

Получаем

$$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\} = \{0; 3; 0\},$$

$$\overrightarrow{BD} = \{x_D - x_B; y_D - y_B; z_D - z_B\} = \{2; -7; -2\},$$

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) &= \frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot (-7) + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{-21}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{57}} = -\frac{7}{\sqrt{57}}. \end{aligned}$$

Полученное значение косинуса $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = -\frac{7}{\sqrt{57}} < 0$ соответствует тупому углу. Чтобы найти значение острого угла между диагоналями, воспользуемся формулами приведения.

$$\text{Пусть } (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BD}) = \alpha, \text{ тогда } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{7}{\sqrt{57}}.$$

Задача 5. Даны векторы $\vec{a} = \{-3; 4; 0\}$ и $\vec{b} = \{-12; 5; 0\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 112$.

Решение

Из условия $\vec{x} \parallel \vec{a}$ следует, что $\vec{x} = \lambda \vec{a} = \{-3\lambda; 4\lambda; 0\}$.

Из условия $(\vec{x}, \vec{b}) = 112$ получаем $-3\lambda \cdot (-12) + 4\lambda \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 112$,

$$36\lambda + 20\lambda = 112,$$

$$56\lambda = 112 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Тогда $\vec{x} = 2\vec{a} = \{-6; 8; 0\}$.

Задача 6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{5; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{4; -2; 2\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{174}$.

Решение

Так как по условию вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{5; 3; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; -1; -2\}$, заключаем, что он параллелен вектору

$[\vec{a}, \vec{b}]$. Тогда $\vec{x} = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$. Найдём векторное произведение векторов $\vec{a} = \{9; 3; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; -1; -2\}$:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(6 - 2) - \vec{j}(10 + 4) + \vec{k}(-10 - 12) = \{4; -14; -22\}.$$

Тогда $\vec{x} = \{4\lambda; -14\lambda; -22\lambda\}$.

Найдём модуль вектора $\vec{x}$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(4\lambda)^2 + (-14\lambda)^2 + (-22\lambda)^2} = \sqrt{696\lambda^2} = 2|\lambda|\sqrt{174}.$$

По условию задачи $|\vec{x}| = \sqrt{174}$, следовательно, $\sqrt{174} = 2|\lambda|\sqrt{174} \Rightarrow$

$|\lambda| = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$. Получаем два вектора $\vec{x}_1 = \{2; -7; -11\}$ и $\vec{x}_2 = \{-2; 7; 11\}$. Вектор $\vec{x}$ образует с осью Oy острый угол, значит вторая координата этого вектора – положительная. Поэтому выбираем вектор $\vec{x}_2 = \{-2; 7; 11\}$.

Задача 7. Даны вершины пирамиды $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

Решение

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, совпадающих с рёбрами пирамиды.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \{4 - 2; 3 - 2; 3 - 2\} = \{2; 1; 1\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\} = \{4 - 2; 5 - 2; 4 - 2\} = \{2; 3; 2\};$$

$$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A\} = \{5 - 2; 5 - 2; 6 - 2\} = \{3; 3; 4\}.$$

Объём пирамиды находим с помощью смешанного произведения:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ в координатной форме

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 5 = 7.$$

Подставим значение смешанного произведения в формулу для вычисления объёма пирамиды, получим:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{7}{6}.$$

Чтобы найти высоту пирамиды H , воспользуемся известной формулой объёма пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot S_{\text{осн.}} \Leftrightarrow H = \frac{3 \cdot V}{S_{\text{осн.}}}, \text{ где } S_{\text{осн.}} - \text{площадь грани } ABC.$$

Так как грань ABC есть треугольник, то её площадь может быть найдена как половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right|.$$

Сначала найдём векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ в координатной форме:

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(2-3) - \vec{j}(4-2) + \vec{k}(6-2) = \{-1; -2; 4\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}.$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Подставляем найденные значения в формулу

$$H = \frac{3 \cdot V}{S_{\text{осн.}}},$$

получаем

$$H = \frac{3 \cdot \frac{7}{6}}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Задача 8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{1; 4; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{-3; -2; 0\}$, $\vec{e}_3 = \{1; -1; 2\}$, $\vec{x} = \{-5; -8; -3\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Решение

а) Для того, чтобы доказать, что три вектора образуют базис пространства, достаточно показать, что они некопланарны, т.е. их смешанное произведение не равно нулю. Находим

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ -1 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} = 27 - 2 = 25 \neq 0.$$

б) Запишем разложение вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\vec{x} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3.$$

Так как $\vec{x} = \{-5; -8; -3\}$ и $\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3 = \{\alpha - 3\beta + \gamma; 4\alpha - 2\beta - \gamma; \alpha + 2\gamma\}$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов разложения

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta + \gamma = -5, \\ 4\alpha - 2\beta - \gamma = -8, \\ \alpha + 2\gamma = -3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0 \Rightarrow \text{Система имеет единственное решение.}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -8 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -13 & -5 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -13 & -5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -78 + 35 = -43,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & -8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & -13 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -13 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 13 = 22,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 10 & 12 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 36 = -16.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных системы:

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-43}{25} = -\frac{43}{25}, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{22}{25}, \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-16}{25} = -\frac{16}{25}.$$

Таким образом,

$$\vec{x} = -\frac{43}{25} \vec{e}_1 + \frac{22}{25} \vec{e}_2 - \frac{16}{25} \vec{e}_3.$$

4.2.5. Индивидуальное задание № 3

Вариант № 1

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5; 1)$

а) параллельно прямой $2x + 3y + 1 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2}$;

в) под углом 30° к прямой $y + 7 = 0$;

г) и точку $B(2; 3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 5 - 2x$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-5; 1)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$;

в) $5y^2 - 4x^2 + 16x - 36 = 0$;

б) $x = -2 - 3\sqrt{-5 - 6y - y^2}$;

г) $y = 2y^2 + 8x + 1$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах:

а) $\rho = \cos(\varphi + \pi/3)$;

б) $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 2 \sin t, \\ x = 3 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 - 3t), \\ x = t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y - x \leq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geq 1 - x, \\ y \leq 3 - x, \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$

Вариант № 2

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 1)$

а) параллельно прямой $2x + y - 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1}$;

в) под углом 60° к прямой $y - 5 = 0$;

г) и точку $B(-2; 3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1 : y = 4 - 2x$ и $l_2 : \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = t + 2 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2; 2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$;

в) $x = -2 - 2\sqrt{4 - y^2}$;

б) $x^2 - y^2 + 12x - 14y + 85 = 0$;

г) $2y^2 + 8y - x + 1 = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi - \pi/3)$;

б) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 3 \sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 + 3t), \\ x = t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x \leq -1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y - x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geq 2x - 2, \\ y \leq 2x + 1, \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$

Вариант № 3

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 0)$

а) параллельно прямой $3x - 2y + 4 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3}$;

в) под углом 45° к прямой $y - 3 = 0$;

г) и точку $B(-1; 1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1 : y = 2x - 5$ и $l_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5t + 1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1; 2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$;

в) $y = -3 + \sqrt{5x - 2}$;

б) $4x^2 - 24x + 3y^2 + 24 = 0$;

г) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 5 = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi + \pi/6)$;

б) $\rho = 2(1 + \sin \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 2 \sin t, \\ x = 4 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 + 3t), \\ x = -t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geq x + 1, \\ y \leq x + 3, \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$

Вариант № 4

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$

а) параллельно прямой $-x + 3y + 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{5}$;

в) под углом 120° к прямой $y + 12 = 0$;

г) и точку $B(5; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 3x - 1$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-2; -1)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0$;

в) $x = -4 - 3\sqrt{y+5}$;

б) $x^2 - y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$;

г) $16y^2 + 9x^2 - 18x = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi - \pi/6)$;

б) $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 3 \sin t, \\ x = 4 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 - 3t), \\ x = -t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y \geq -3x, \\ 2y \leq 6 - 3x, \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$

Вариант № 5

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4; 3)$

а) параллельно прямой $3x + y - 8 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{1}$;

в) под углом 135° к прямой $y - 7 = 0$;

г) и точку $B(4; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = -5x + 7$ и $l_2: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2; 3)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 24 = 0$;

в) $y = 1 - \sqrt{7 - 3x}$;

б) $3x^2 + 6x + 4y^2 - 8y + 3 = 0$;

г) $y^2 - x^2 - x - y - 1 = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \sin(\varphi - \pi/6)$;

б) $\rho = 3(1 - \sin \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 4 \sin t, \\ x = 2 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^3 - t, \\ x = t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x - y \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y \geq -2x, \\ 3y \leq 6 - 2x, \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$

Вариант № 6

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$

а) параллельно прямой $3x - y - 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{1}$;

в) под углом 30° к прямой $y - 4 = 0$;

г) и точку $B(2; 5)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 4 - 5x$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -5t + 8 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1; 5)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;

в) $4y^2 - 9x^2 + 18x + 16y + 43 = 0$;

б) $x = 3 + \sqrt{-6(y-2)}$;

г) $9y^2 + 4x^2 - 18y - 27 = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах:

а) $\rho = \sin(\varphi + \pi/3)$;

б) $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 3 \sin t, \\ x = 2 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^3 + t, \\ x = -t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \geq 2y - 2, \\ x \leq 2y + 1, \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$

Вариант № 7

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -1)$

а) параллельно прямой $5x - y - 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{4}$;

в) под углом 150° к прямой $y + 5 = 0$;

г) и точку $B(-1; 2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = -1 - 2x$ и $l_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2; -2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$;

в) $x = -2 - \sqrt{16 - y^2}$;

б) $x^2 - y^2 + 12x - 14y + 85 = 0$;

г) $y = 2x^2 + 8x + 1$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi + \pi/4)$;

б) $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 3 \cos t, \\ x = 2 \sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^2, \\ x = \frac{1}{3}(t^3 + 3t). \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \geq 2y - 2, \\ x \leq 2y + 1, \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$

Вариант № 8

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$

а) параллельно прямой $4x - y + 1 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-5}$;

в) под углом 45° к прямой $y + 6 = 0$;

г) и точку $B(2; 2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 2x + 5$ и $l_2: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-3; 2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

в) $y = -3 + \sqrt{5x - 2}$;

б) $4x^2 - 6x + 3y^2 = 0$;

г) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \sin(\varphi + \pi/6)$;

б) $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 4 \sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -t^2, \\ x = \frac{1}{3}(t^3 + 3t). \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geq 1 - 2x, \\ y \leq 5 - 2x, \\ y - x - 1 \leq 0 \end{cases}$

Вариант № 9

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 3)$

а) параллельно прямой $2x - 3y + 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-2}{5}$;

в) под углом 120° к прямой $y + 1 = 0$;

г) и точку $B(3; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 1 - 3x$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(5; 2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$;

в) $x = -4 - 3\sqrt{y+5}$;

б) $x^2 - y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$;

г) $16y^2 + 9x^2 - 18x = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi - \pi/4)$;

б) $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 3 \cos t, \\ x = 4 \sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = -t^2, \\ x = \frac{1}{3}(t^3 - 3t). \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y \geq 1 - 2x, \\ y \leq 5 - 2x, \\ y - x - 1 \geq 0 \end{cases}$

Вариант № 10

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 5)$

а) параллельно прямой $x + 2y - 4 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{3}$;

в) под углом 150° к прямой $y - 2 = 0$;

г) и точку $B(6; -2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 7x - 5$ и $l_2: \begin{cases} x = t + 4 \\ y = -2t - 1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1; 3)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$;

в) $y = -4 - \sqrt{5x - 10}$;

б) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

г) $5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \sin(\varphi - \pi/4)$;

б) $\rho = 4(1 + \sin \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = \cos t, \\ x = 2 \sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^2, \\ x = t^3 - t. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \geq -1 - 2y, \\ x \leq -1 - 2y, \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$

Вариант № 11

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(-3; 2)$

- a) параллельно прямой $2x + 5y + 4 = 0$;
- b) перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1}$;
- c) под углом 45° к прямой $y - 2 = 0$;
- d) и точку $B(7; -5)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 2x - 4$, $l_2: \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -2t + 4 \end{cases}$

Найдите:

- a) точку пересечения прямых,
- b) косинус угла между прямыми,
- c) расстояния от точки $M(6; -4)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- 1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$
- 2) $4x^2 + 8x + y^2 - 4y - 1 = 0$
- 3) $y = 9 + \sqrt{x^2 + 9}$
- 4) $x = 5y - y^2$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

- 1) $\rho = \cos(\varphi - \pi/4)$,
- 2) $\rho = 3 + 2\varphi$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

- 1) $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$

6. Постройте фигуры, заданные неравенствами

- 1) $\begin{cases} y \leq 1 - x^2, \\ x + y \geq 1. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 2x - y \geq -4, \\ 2x - 5y \leq 10 \\ x \leq 7. \end{cases}$

Вариант № 12

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(5; -4)$

а) параллельно прямой $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -4 \end{cases}$

б) перпендикулярно прямой $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$;

в) под углом 45° к прямой $x + 3 = 0$;

г) через две точки: $A(5; -4)$ и $B(-3; 7)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: 6x + 8y + 6 = 0$, $l_2: \begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = -4t - 4 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус угла между прямыми,

в) расстояния от точки $M(1; -5)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

1) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$ 2) $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y - 5 = 0$

3) $x^2 - 9y^2 = 36y$ 4) $x = 3 + 2\sqrt{1 - y}$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \varphi^2$, 2) $\rho = 6 \cos \varphi$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = -4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 1 - \sin 2t \\ y = 2 + \cos 2t \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x \leq 5 - y^2, \\ x + 4y \geq 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x + y \leq 3, \\ 5x + 3y \leq 97 \\ x + 7y \geq 77. \end{cases}$

Вариант № 13

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 2)$

а) параллельно прямой $\frac{x}{10} - \frac{y}{2} = 1$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+6}{2} = \frac{y-4}{5}$;

с) под углом 45° к прямой $y - x = 0$;

д) через две точки: $A(-1; 2)$ и $B(5; -3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: 2x - 3y = 8$, $l_2: \begin{cases} x = -6t - 8 \\ y = 9t + 5 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус угла между прямыми,

с) расстояния от точки $M(4; -2)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

1) $6x^2 + 4y^2 - 12x = 0$ 2) $x^2 + 8x - y^2 - 4y + 3 = 0$

3) $y = 1 + \sqrt{9 - x^2}$ 4) $x = 2y^2 - 2y + 3$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = 1 - \cos \varphi$, 2) $\rho = 2 \sin \varphi$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \sin^2 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} \frac{3}{2x} \leq y \leq \frac{3}{2}\sqrt{x}, \\ x \leq 9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 4y \leq 53, \\ x - y \leq 3 \\ 7x + 3y \geq 71. \end{cases}$

Вариант № 14

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(4; -7)$

- а) параллельно прямой $x = 4t + 7; y = 3t - 1$;
- б) перпендикулярно прямой $y = 6x + 8$;
- в) под углом 45° к прямой $y + x = 0$;
- г) через две точки: $A(4; -7)$ и $B(0; 3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: \frac{x}{3} + y = 1, \quad l_2: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3t - 4 \end{cases}$

Найдите:

- а) точку пересечения прямых,
- б) косинус угла между прямыми,
- в) расстояния от точки $M(5; -3)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- 1) $3x^2 + 4y^2 + 16y = 36$
- 2) $x^2 + y^2 = 4x$
- 3) $x = 5 - \sqrt{y^2 + 4}$
- 4) $x^2 + 10x + 8y + 41 = 0$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

- 1) $\rho = \sin 3\varphi,$
- 2) $\rho = \frac{1}{\varphi}.$

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

- 1) $\begin{cases} x = 2(t + \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t + 3 \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

- 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 12, \\ x\sqrt{6} \geq y^2. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 3x - y \geq 9, \\ 2x + 8y \leq 50 \\ -x + 4y \geq 49. \end{cases}$

Вариант № 15

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(4; -3)$

а) параллельно прямой $2y - 7x = 8$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$;

с) под углом 45° к прямой $y = -3$;

д) через две точки: $A(4; -3)$ и $B(-2; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: y = 5x + 6$, $l_2: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{1}$.

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус острого угла между прямыми,

с) расстояния от точки $M(-4; 3)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

1) $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$ 2) $16y^2 - 9x^2 - 32y - 72x = 272$

3) $y = 2 + 4\sqrt{1 - x^2}$ 4) $2x = 8 - y^2$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}$, 2) $\rho = -5 \cos \varphi$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 3 \sin t + 2 \cos t \\ y = 3 \cos t + 2 \sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2t \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 6y, \\ y \geq x, \quad y \geq -x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - 5y \geq 17, \\ x + 2y \leq 34 \\ -4x + 9y \geq 17. \end{cases}$

Вариант № 16

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(-2; 4)$

- а) параллельно прямой $3x + 8y = 12$;
- б) перпендикулярно прямой $x = 5t - 1$; $y = 6t + 3$;
- в) под углом 45° к прямой $x + 5 = 0$;
- г) через две точки: $A(-2; 4)$ и $B(-3; 1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: 7x - 2y + 51 = 0$, $l_2: \begin{cases} x = 7t + 2 \\ y = 6 - 2t \end{cases}$

Найдите:

- а) точку пересечения прямых,
- б) косинус угла между прямыми,
- в) расстояния от точки $M(-5; -2)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- 1) $x^2 + y^2 - 5x + 6y = 0$
- 2) $2x^2 - 12x + 5y^2 + 10y + 13 = 0$
- 3) $y = 2 - \sqrt{3x - 7}$
- 4) $9x^2 - 36x = 16y^2$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

- 1) $\rho = \cos(\varphi - \pi/3)$,
- 2) $\rho = \frac{5}{\sin \varphi}$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

- 1) $\begin{cases} x = 2 \cos^2 t \\ y = 5 \sin^2 t \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x = \sin(t/2) \\ y = \cos t \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

- 1) $\begin{cases} y^2 \leq 2x, \\ y - x \geq 4. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} -3x + 14y \leq 78, \\ 5x - 6y \leq 26 \\ x + 4y \geq 26. \end{cases}$

Вариант № 17

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(-3; -1)$

а) параллельно прямой $y = 4x - 6$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{7} = \frac{y+3}{-2}$;

с) под углом 45° к прямой $y = x$;

д) через две точки: $A(-3; -1)$ и $B(-2; 2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: 3x + 4y + 2 = 0$, $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{3}$.

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус острого угла между прямыми,

с) расстояния от точки $M(7; -5)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

2) $16x^2 + 32x + 25y^2 - 100y + 16 = 0$

3) $y = 4 - 3\sqrt{x+5}$

4) $x^2 = 2y^2 + 8x + 1$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$,

2) $\rho = -3\varphi$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \sin t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = 2t \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x \geq y^2, \\ y^2 \leq x - 2 \\ y \geq 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 11x - 3y \geq 24, \\ 9x + 4y \leq 110 \\ -2x + 7y \geq 15. \end{cases}$

Вариант № 18

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(2; 6)$

а) параллельно прямой $\frac{x+4}{-6} = \frac{y-8}{5}$;

б) перпендикулярно прямой $4x + y + 10 = 0$;

в) под углом 45° к прямой $y = 2x$;

г) через две точки: $A(2; 6)$ и $B(-5; 4)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: x - 3y = 0$, $l_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -9t + 10 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус угла между прямыми,

в) расстояния от точки $M(-4; -6)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

1) $3x^2 - 4y^2 - 12x + 24 = 0$ 2) $6x^2 + 4y^2 - 6y + 9 = 0$

3) $y = -3 + \sqrt{16 - x^2}$ 4) $y = 3 + 4\sqrt{x + 1}$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \frac{2}{\cos \varphi}$, 2) $\rho = 4(1 + \cos \varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3t \\ y = \sqrt{1-t} \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 8x, \\ -x \leq y \leq x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x + 5y \leq 29, \\ 3x - y \leq 14 \\ 5x + 2y \geq 38. \end{cases}$

Вариант № 19

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(-3; -7)$

а) параллельно прямой $x = 2t + 8; y = -3t + 4$;

б) перпендикулярно прямой $y = 3x - 5$;

с) под углом 45° к прямой $x = 2y$;

д) через две точки: $A(-3; -7)$ и $B(-7; 2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: 5x - 4y + 4 = 0$, $l_2: \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус острого угла между прямыми,

с) расстояния от точки $M(3; -6)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

$$1) x^2 - y^2 - x - y = 0 \quad 2) 3x^2 - 6x + 2y^2 + 4y = 0$$

$$3) y = 3 + \sqrt{9 - x^2} \quad 4) x^2 + 16x - 18y + 100 = 0$$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

$$1) \rho = 2(1 + \sin \varphi), \quad 2) \rho = \pi/3 - \varphi.$$

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

$$1) \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \sin \frac{t}{2} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t + 3 \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ 3y - 4x \leq 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - y \geq 4, \\ x + 3y \leq 37 \\ -4x + 9y \geq 20. \end{cases}$$

Вариант № 20

1. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(0; -6)$

а) параллельно прямой $y = -6x - 5$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x}{4} - \frac{y}{9} = 1$;

с) под углом 45° к прямой $x + y = 1$;

д) и точку $B(9; 3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны две прямые $l_1: 8x - 7y + 19 = 0$, $l_2: \begin{cases} x = 8t - 6 \\ y = 7t - 2 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых,

б) косинус острого угла между прямыми,

с) расстояния от точки $M(7; -3)$ до прямой l_1 и до прямой l_2 .

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

1) $2x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$

2) $y^2 - 4y - 20x + 24 = 0$

3) $x = -5 - 2\sqrt{y^2 + 9}$

4) $x^2 + y^2 = 6x + 8y$

4. Постройте линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \sin^2 \varphi$,

2) $\rho = \frac{3}{2\sin \varphi - 3\cos \varphi}$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2 - \cos t \\ y = -4 + \sin t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2, \\ y^2 + x \leq 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10x - y \geq 57, \\ 2x + 3y \leq 53 \\ 5x - 7y \leq 15. \end{cases}$

4.2.6. Решение типового варианта и образец оформления

Вариант № 0

Задача 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$

а) параллельно прямой $5x - 3y + 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{4} = \frac{y-7}{2}$;

в) под углом 45° к прямой $y - 5 = 0$;

г) и точку $B(0; 5)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

Решение

а) Из общего уравнения $5x - 3y + 2 = 0$ выписываем координаты нормального вектора этой прямой (коэффициенты при неизвестных в уравнении)

$$\vec{N} = \{5; -3\}.$$

Так как искомая прямая параллельна данной, то вектор нормали данной прямой может служить вектором нормали и для искомой прямой. Поэтому общее уравнение искомой прямой имеет вид

$$5x - 3y + C = 0.$$

Прямая проходит через точку $A(-3; 4)$, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению $5x - 3y + C = 0$. Подставляем в это уравнение координаты точки $A(-3; 4)$

$$5 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 + C = 0 \Rightarrow -15 - 12 + C = 0 \Rightarrow C = 27.$$

Таким образом, общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 4)$ параллельно прямой $5x - 3y + 2 = 0$

имеет вид

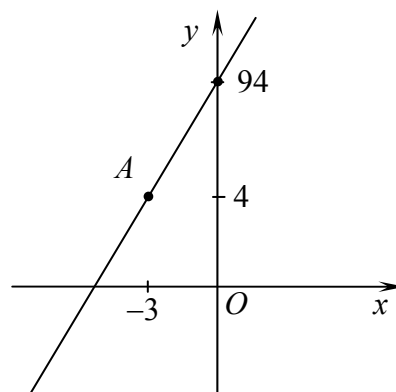
$$5x - 3y + 27 = 0.$$

Выписываем нормальный вектор

$$\vec{N} = \{5; -3\}.$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой, из общего уравнения выразим переменную y . Получим

$$3y = 5x + 27 \Rightarrow y = \frac{5}{3}x + 9 \Rightarrow k = \frac{5}{3}.$$



В качестве направляющего вектора прямой можно взять один из векторов, перпендикулярных вектору нормали $\vec{N} = \{5; -3\}$, например, вектор $\vec{s} = \{3; 5\}$.

б) Из канонического уравнения прямой $\frac{x+1}{4} = \frac{y-7}{2}$ выписываем координаты направляющего вектора этой прямой $\vec{s} = \{4; 2\}$.

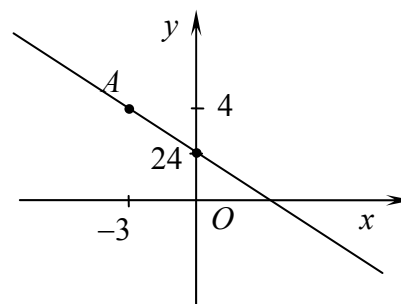
Так как искомая прямая перпендикулярна данной, она перпендикулярна и вектору $\vec{s}$. Поэтому вектор $\vec{s}$ является нормальным вектором искомой прямой. Записываем уравнение прямой, проходящей через данную точку $A(-3; 4)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N} = \vec{s} = \{4; 2\}$

$$4(x - (-3)) + 2(y - 4) = 0 \Rightarrow 4(x + 3) + 2(y - 4) = 0 \Rightarrow 4x + 12 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 4x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow 2x + y + 2 = 0.$$

Выписываем нормальный вектор $\vec{N} = \{2; 1\}$.

Чтобы найти угловой коэффициент прямой, из общего уравнения выразим переменную y . Получим $y = -2x - 2 \Rightarrow k = -2$.

В качестве направляющего вектора прямой берём один из векторов, перпендикулярных вектору нормали $\vec{N} = \{2; 1\}$, например, вектор $\vec{s} = \{-1; 2\}$.



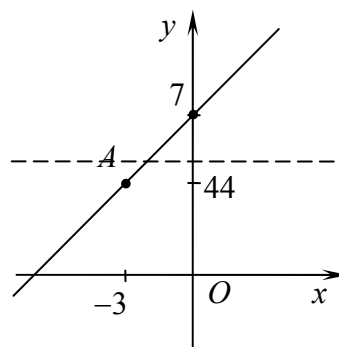
в) Прямая $y - 5 = 0$ параллельна оси Ox , поэтому искомая прямая проходит под углом 45° и к оси Ox . Значит, можем найти угловой коэффициент искомой прямой $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Записываем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где $k = 1$

$$y = x + b.$$

Прямая проходит через точку $A(-3; 4)$, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению $y = x + b$. Подставляем в это уравнение координаты точки $A(-3; 4)$

$$4 = -3 + b \Rightarrow b = 4 + 3 = 7.$$

Тогда $y = x + 7$.



Кроме того, можно провести ещё одну прямую под углом 45° к прямой $y - 5 = 0$. В этом случае искомая прямая будет составлять с осью Ox угол 135° . Тогда угловой коэффициент равен $k = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$.

Записываем уравнение с угловым коэффициентом $y = -x + b$.

Подставляем в это уравнение координаты точки $A(-3; 4)$ и находим значение параметра b

$$4 = -(-3) + b \Rightarrow b = 4 - 3 = 1.$$

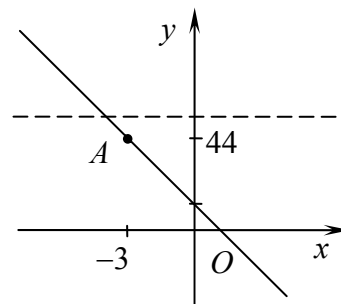
Тогда $y = -x + 1$.

Таким образом, под углом 45° к прямой $y - 5 = 0$ проходят две прямые $y = x + 7$ и $y = -x + 1$.

Чтобы найти векторы нормали для этих прямых, приведём их уравнения к общему виду

$$y = x + 7 \Rightarrow x - y + 7 = 0 \Rightarrow \vec{N} = \{1; -1\} \\ \Rightarrow \vec{s} = \{1; 1\};$$

$$y = -x + 1 \Rightarrow x + y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{N} = \{1; 1\} \Rightarrow \vec{s} = \{1; -1\}.$$



г) Записываем уравнение прямой проходящей через две точки $A(-3; 4)$ и $B(0; 5)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - (-3)}{0 - (-3)} = \frac{y - 4}{5 - 4} \Rightarrow \frac{x + 3}{3} = \frac{y - 4}{1}.$$

Из канонического уравнения прямой выписываем направляющий вектор этой прямой $\vec{s} = \{-1; 2\}$. Приводим уравнение

$$\frac{x + 3}{3} = \frac{y - 4}{1}$$

к общему виду и выписываем нормальный вектор прямой

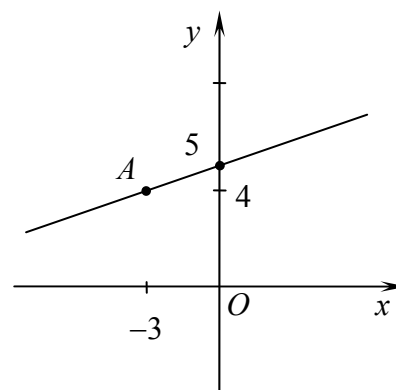
$$1 \cdot (x + 3) = 3 \cdot (y - 4) \Rightarrow x + 3 = 3y - 12 \Rightarrow$$

$$x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow \vec{N} = \{1; -3\}.$$

Чтобы найти угловой коэффициент прямой, приведём её уравнение к виду $y = kx + b$

$$x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow 3y = x + 15 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{3}x + 5 \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$



В качестве направляющего вектора прямой берём один из векторов, перпендикулярных вектору нормали $\vec{N} = \{1; -3\}$, например, вектор $\vec{s} = \{3; 1\}$.

Задача 2. Даны две прямые $l_1: y = 3x + 5$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t + 5 \end{cases}$

Найдите:

- точку пересечения прямых;
- косинус угла между прямыми;
- расстояние от точки $M_0(3; 1)$ до каждой прямой.

Решение

а) Для определения точки пересечения прямых l_1 и l_2 решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ x = 3t + 2 \\ y = -t + 5 \end{cases} \Rightarrow -t + 5 = 3 \cdot (3t + 2) + 5 \Rightarrow -t + 5 = 9t + 6 + 5 \Rightarrow$$

$$9t + t = -6 \Rightarrow 10t = -6 \Rightarrow t = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5}.$$

$$x = 3t + 2 = 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 = \frac{1}{5};$$

$$y = -t + 5 = -\left(-\frac{3}{5}\right) + 5 = \frac{18}{5}.$$

Следовательно, прямые пересекаются в точке с координатами $\left(\frac{1}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

б) Косинус угла между данными прямыми найдём как косинус угла между их нормальными векторами. Для нахождения координат векторов нормали уравнения прямых приводим к общему виду:

$$l_1: y = 3x + 5 \Rightarrow 3x - y + 5 = 0 \Rightarrow \vec{N}_1 = \{3; -1\};$$

$$l_2: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-2}{3} \\ t = -y+5 \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = -y+5 \Rightarrow x-2 = -3y+15$$

$$\Rightarrow x + 3y - 17 = 0 \Rightarrow \vec{N}_2 = \{1; 3\}.$$

Косинус угла между векторами $\vec{N}_1 = \{3; -1\}$ и $\vec{N}_2 = \{1; 3\}$ находим по формуле

$$\cos(\vec{N}_1; \vec{N}_2) = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|},$$

$$\cos(\vec{N}_1; \vec{N}_2) = \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{0}{10} = 0 \Rightarrow (\vec{N}_1; \vec{N}_2) = 90^\circ.$$

в) Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находим по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В пункте б) были получены общие уравнения для каждой прямой

$$l_1: 3x - y + 5 = 0;$$

$$l_2: x + 3y - 17 = 0.$$

Находим расстояние от точки $M_0(3; 1)$ до прямой l_1

$$d_1 = \frac{|3 \cdot 3 - 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}};$$

Находим расстояние от точки $M_0(3; 1)$ до прямой l_2

$$d_2 = \frac{|3 + 3 \cdot 1 - 17|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}.$$

Задача 3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + x = 0;$

в) $y = 1 - \sqrt{2 - x};$

б) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0;$

г) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0.$

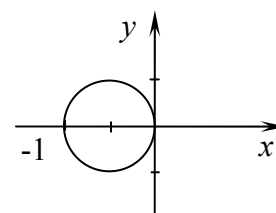
Решение

а) Чтобы привести уравнение кривой к каноническому виду, сгруппируем переменные, и выделим полный квадрат:

$$x^2 + y^2 + x = 0 \Rightarrow (x^2 + x) + y^2 = 0;$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $C\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ и радиусом $R = \frac{1}{2}$.



б) Преобразуем это уравнение

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0;$$

$$(9x^2 + 18x) + (4y^2 - 8y) - 23 = 0;$$

$$9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 2y) - 23 = 0;$$

$$9(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) - 23 = 0;$$

$$9((x+1)^2 - 1) + 4((y-1)^2 - 1) - 23 = 0;$$

$$9(x+1)^2 - 9 + 4(y-1)^2 - 4 - 23 = 0;$$

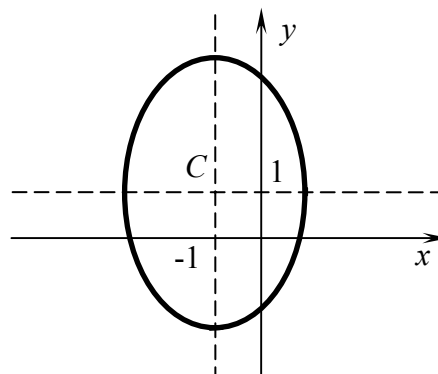
$$9(x+1)^2 + 4(y-1)^2 = 36;$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Полученное каноническое уравнение

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

определяет эллипс с центром в точке $C(-1; 1)$ и полуосями $a = 2$, $b = 3$.



в) Чтобы привести уравнение $y = 1 - \sqrt{2-x}$ к каноническому виду, перенесём слагаемое (-1) в левую часть равенства и возведём обе части в квадрат

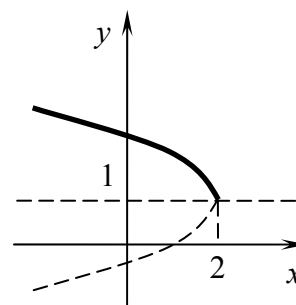
$$(y-1)^2 = (-\sqrt{2-x})^2;$$

$$(y-1)^2 = 2-x;$$

$$(y-1)^2 = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-2).$$

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке $(2; 1)$, осью симметрии этой параболы параллельна оси Ox , ветви направлены влево, значение параметра $p = \frac{1}{2}$.

Равенство $y = 1 - \sqrt{2-x}$ определяет только те значения переменной y , которые меньше единицы, следовательно, ему соответствует одна ветвь параболы, расположенная выше прямой $y = 1$.



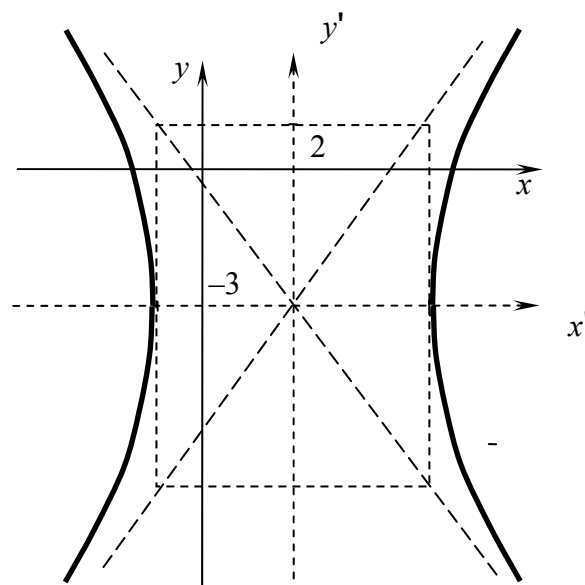
г) Преобразуем уравнение к каноническому виду

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (16x^2 - 64x) - (9y^2 + 54y) - 161 &= 0; \\
 16(x^2 - 4x) - 9(y^2 + 6y) - 161 &= 0; \\
 16(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 9(y^2 + 6y + 3^2 - 3^2) - 161 &= 0; \\
 16((x-2)^2 - 4) - 9((y+3)^2 - 9) - 161 &= 0; \\
 16(x-2)^2 - 64 - 9(y+3)^2 + 81 - 161 &= 0; \\
 16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 &= 144; \\
 \frac{16(x-2)^2}{144} - \frac{9(y+3)^2}{144} &= 1; \\
 \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} &= 1.
 \end{aligned}$$

Уравнение $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ определяет гиперболу:

- действительная полуось $a = 3$,
- мнимая полуось $b = 4$,
- центр симметрии в точке $(2; -3)$.



Задача 4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$; б) $\rho = 2 \cos \varphi$.

Решение

а) Полярный радиус ρ может принимать только неотрицательные значения, т.е. $\rho \geq 0$. Поэтому

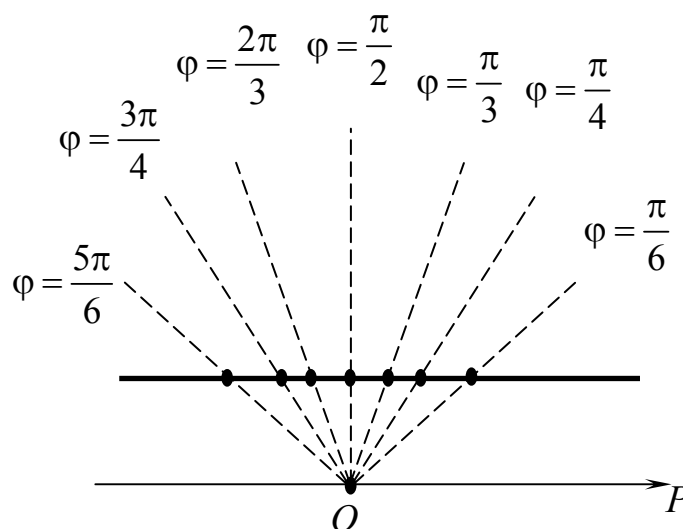
$$\frac{1}{\sin \varphi} \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi > 0 \Rightarrow 0 + 2\pi k < \varphi < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Составим таблицу значений

φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin \varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2

В полярной системе координат строим точки $(\rho; \varphi)$ следующим образом: сначала проводим луч, образующий с полярной осью угол φ , затем на нём откладываем ρ единиц масштаба.

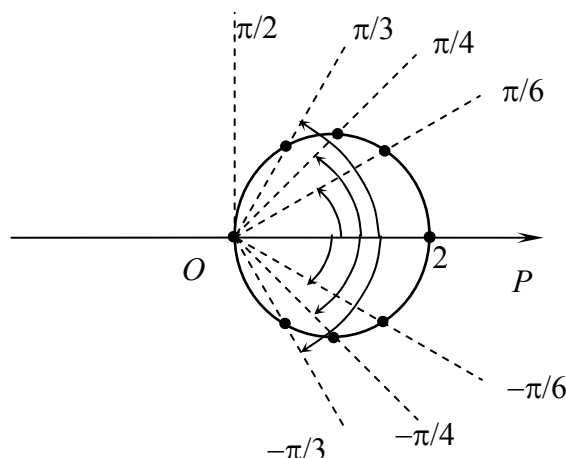
Точки соединяем сплошной линией. Получили прямую, параллельную полярной оси.



б) Составим таблицу значений функции $\rho = 2 \cos \varphi$ при изменении аргумента φ от 0 до 2π (период функции $\cos \varphi$ равен 2π). Учитывая, что

$\rho \geq 0$, рассматриваем только значения $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
ρ	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1



Задача 5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

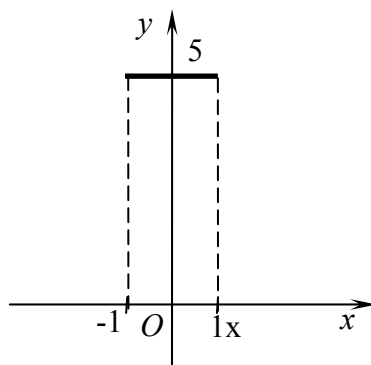
а) $\begin{cases} y = 5, \\ x = \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^2, \\ x = 2 + t. \end{cases}$

Решение

а) При любом значении параметра t переменная y принимает значение, равное 5; а переменная x не превосходит по модулю 1, т.е.

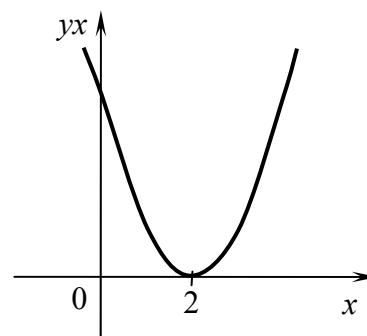
$$y = 5, |x| = |\cos t| \leq 1 \text{ для всех } t.$$



б) Исключим параметр t . Для этого выразим из второго равенства системы переменную t и подставим в первое равенство

$$\begin{cases} y = t^2, \\ x = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t^2, \\ t = x - 2 \end{cases} \Rightarrow y = (x - 2)^2.$$

Уравнение $y = (x - 2)^2$ определяет в декартовой системе координат параболу с вершиной в точке $(2; 0)$, осью симметрии, параллельной оси Oy , ветви направлены вверх.



Задача 6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

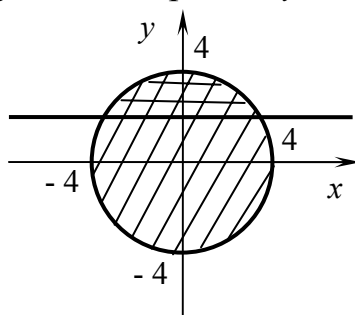
$$a) \begin{cases} y \geq 2, \\ x^2 + y^2 \leq 16, \end{cases} \quad б) \begin{cases} 6y \geq 5x - 15, \\ 3y \leq 10x + 15, \\ 5x + 3y - 15 \leq 0 \end{cases}$$

Решение

а) Сначала построим границы области, заданной системой

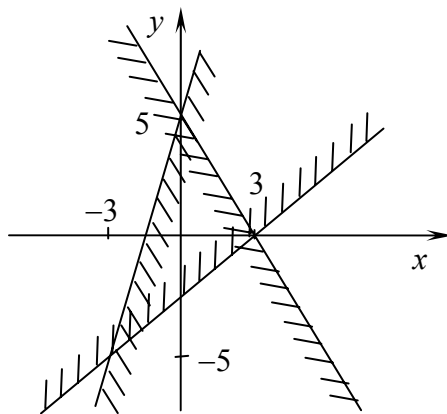
$$\begin{cases} y \geq 2, \\ x^2 + y^2 \leq 16, \end{cases}$$

т.е. линии $y = 2$ и $x^2 + y^2 = 16$. Неравенство $x^2 + y^2 \leq 16$ определяет на плоскости внутреннюю часть круга, неравенство $y \geq 2$ определяет часть плоскости, расположенную выше прямой $y = 2$.



б) Границами данной области являются прямые $6y = 5x - 15$, $3y = 10x + 15$, $5x + 3y - 15 = 0$.

Построим эти прямые в одной системе координат. Множество точек, задаваемое неравенством $6y \geq 5x - 15$, - это полуплоскость, расположенная выше прямой $6y = 5x - 15$. Множество точек, задаваемое неравенством, $3y \leq 10x + 15$ - это полуплоскость, расположенная ниже прямой $3y = 10x + 15$. Множество точек, задаваемое неравенством, $5x + 3y - 15 \leq 0$ - это полуплоскость, расположенная ниже прямой $5x + 3y - 15 = 0$. Пересечение этих множеств представляет собой треугольник.



4.2.7. Индивидуальное задание № 4

Вариант № 1

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(3; -2; 0)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{3; 2; -4\}$ и $\vec{a}_2 = \{4; -1; -2\}$;

б) через три точки $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 3)$, $C(3; -2; 0)$;

в) через точку $A(4; 4; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$;

г) через точку $M_0(2; 3; -3)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(4; -4; 0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{0; 2; 3\}$;

б) две точки $A(-1; 2; 3)$ и $B(2; -1; 1)$;

в) точку $M_0(2; 1; -3)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-1; -2; 3)$ перпендикулярно плоскости $x + 3y - 4z - 9 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ x - 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$ получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$$

и плоскостью $x + 3y - z + 1 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(1; -4; 1)$ до плоскости

$$x - z + 5 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{3}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 10z + 2 = 0$;

г) $x = -\sqrt{z^2 - y^2}$;

б) $x^2 + y^2 = 4$;

д) $2 - x = y^2 + z^2$;

в) $x^2 = 9 - 3y$;

е) $x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z = x^2 + y^2 + 1$, $3y + 2z - 4 = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 12 - y^2$, $z = 0$.

Вариант № 2

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(1; 0; -2)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{7; 4; 6\}$ и $\vec{a}_2 = \{2; 1; 1\}$;

б) через три точки $A(0; -1; -1)$, $B(-2; 3; 5)$, $C(1; -5; -9)$;

в) через точку $A(5; -1; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{0}$;

г) через точку $M_0(2; 3; 8)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(1; 2; -1)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; -3; 0\}$;

б) две точки $A(13; 14; 1)$ и $B(14; 15; 2)$;

в) точку $M_0(-1; 2; -2)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\alpha = 60^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-2; 1; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x - y + 5z - 15 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -4t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases}$$

и плоскостью $x + 2y - 4z - 1 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2; 1; 0)$ до плоскости $y + z + 2 = 0$

и до прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 8y - 12$;

г) $9x^2 - 4y^2 - 36z^2 = 0$;

б) $x^2 + z^2 = 4$;

д) $x^2 + y^2 = 3z + 6$;

в) $x^2 = 4 + z$;

е) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z = x^2 + 4y^2$, $y = x$, $y = -2x$, $y = 1$, $z = 0$;

б) $y^2 = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 1$, $(y \geq 0)$.

Вариант № 3

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(-1; 1; 1)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{1; -2; 3\}$ и $\vec{a}_2 = \{3; 0; -1\}$;

б) через три точки $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$;

в) через точку $A(-4; 6; -3)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2};$$

г) через точку $M_0(5; -3; 1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(-4; 2; 6)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{2; 5; 0\}$;

б) две точки $A(-4; 2; 6)$ и $B(2; -3; 0)$;

в) точку $M_0(-4; 2; 1)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(5; 0; -6)$ перпендикулярно плоскости $2x - 5y + z - 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

и плоскостью $2x + y + z - 11 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(5; 1; 4)$ до плоскости

$$x + y + z + 10 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x-5}{0} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{1}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 + 1 = 0$;

г) $x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 0$;

б) $y^2 + z^2 = 4$;

д) $x^2 + 2z^2 = y$;

в) $8 - y^2 = 2z$;

е) $-x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $3z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; б) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

Вариант № 4

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(-2; 4; 1)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{1; 2; -3\}$ и $\vec{a}_2 = \{2; -1; -1\}$;

б) через три точки $A(1; 5; -4)$, $B(-5; -2; 0)$, $C(-12; 7; -1)$;

в) через точку $A(1; 2; -3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{-5}$;

г) через точку $M_0(-3; 4; -7)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(0; -4; -2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; -5; 6\}$;

б) две точки $A(1; 3; 6)$ и $B(2; 2; 1)$;

в) точку $M_0(-4; 6; 3)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 120^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-1; 0; 1)$ перпендикулярно плоскости $6x + 5y - 4z + 4 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 2x - 6y + 14z - 1 = 0, \\ 5x - 15y + 35z - 3 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = t + 4 \end{cases}$$

и плоскостью $5x + y - 3z + 2 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(0; 4; 1)$ до плоскости

$$2x - 4y + 3z + 4 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2$;

г) $x^2 - 3y^2 - 9z^2 = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 16$;

д) $x^2 + z^2 = 3y + 6$;

в) $z^2 = 4 - y$;

е) $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

б) $x^2 + y^2 = z$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

Вариант № 5

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(-3; -5; 6)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{3; 4; -1\}$ и $\vec{a}_2 = \{2; -1; 1\}$;

б) через три точки $A(-1; -2; -4)$, $B(3; 0; -1)$, $C(-2; 3; 5)$;

в) через точку $A(2; 1; -4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$;

г) через точку $M_0(-1; 2; 4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(-4; 0; 5)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; 3; 5\}$;

б) две точки $A(1; -1; 1)$ и $B(-2; 0; 3)$;

в) точку $M_0(-2; 4; 2)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\alpha = 120^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-2; 0; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 4y + 3z + 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = -t - 3 \\ y = -3t - 1 \\ z = 2t - 10 \end{cases}$$

и плоскостью $x - y + z + 4 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2; 5; 4)$ до плоскости

$$2x + y - z - 8 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 1 = 0$; г) $x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 0$;

б) $x^2 + z^2 = 16$; д) $x^2 + y^2 = 3z + 6$;

в) $y^2 = x - 4$; е) $x^2 + y^2 - z^2 - 4 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z + x^2 + y^2 = 2$, $y = 2$, $y = -2$, $z = 0$;

б) $z^2 = 4x$, $y^2 = 4x$, $x = 1$.

Вариант № 6

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(1; -3; -2)$ параллельно двум векторам

$$\vec{a}_1 = \{3; -5; -6\} \text{ и } \vec{a}_2 = \{1; 0; 1\};$$

б) через три точки $A(0; -1; -1)$, $B(-2; 3; 5)$, $C(1; -5; -9)$;

в) через точку $A(-1; -1; 2)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-1}{1};$$

г) через точку $M_0(7; -5; 1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(1; -2; 3)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{4; -1; 5\}$;

б) две точки $A(-2; 2; -1)$ и $B(0; 3; 2)$;

в) точку $M_0(3; 1; -4)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(1; 8; -5)$ перпендикулярно плоскости $x - y + 2z - 20 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 2x - 2y + z - 6 = 0, \\ 3x - 2y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 4t + 3 \\ z = 3t \end{cases}$$

и плоскостью $3x + 2y - z - 2 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(5; 4; 0)$ до плоскости

$$4x - y + 3z - 6 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x}{-3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

$$а) x^2 + 2x + y^2 + z^2 - 6z + 6 = 0;$$

$$г) 4x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

$$б) y^2 + z^2 = 16;$$

$$д) x^2 + y^2 = 3 - z;$$

$$в) z^2 = x - 3;$$

$$е) -x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

$$а) (x-1)^2 + y^2 = z, 2x + z - 2 = 0;$$

$$б) z = 4 - y^2, z = 2 + y^2, x = -1, x = 2.$$

Вариант № 7

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(-1; -5; 1)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{0; -1; 3\}$ и $\vec{a}_2 = \{3; 2; -2\}$;

б) через три точки $A(-3; 4; -7)$, $B(1; 5; -4)$, $C(-5; -2; 0)$;

в) через точку $A(-3; 5; -2)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-5}{-3} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-2}{2};$$

г) через точку $M_0(2; 3; 4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(5; 0; -3)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; -2; 0\}$;

б) две точки $A(1; 3; 5)$ и $B(0; 2; 1)$;

в) точку $M_0(0; 3; -5)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha = 120^\circ$ и $\beta = 60^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(3; -2; 5)$ перпендикулярно плоскости $x - y - 3z + 2 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 3t + 4 \\ y = 2t + 1 \\ z = -2t \end{cases}$$

и плоскостью $2x - y - 3z - 8 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2; 0; 7)$ до плоскости

$$3x + y - 5z - 12 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4z + 20$;

з) $-9x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 9$;

д) $z^2 + y^2 = 9x$;

в) $x^2 = -2 + y$;

е) $x^2 - y^2 + z^2 - 16 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$;

б) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = x + 2y$, $z = 0$.

Вариант № 8

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(2; -1; 3)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{-3; 1; 4\}$ и $\vec{a}_2 = \{2; 4; -2\}$;

б) через три точки $A(0; 1; 2)$, $B(-2; 3; 4)$, $C(5; 1; 5)$;

в) через точку $A(1; 2; 1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-4}$;

г) через точку $M_0(-2; 0; 1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(2; -1; 0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{-3; 2; 1\}$;

б) две точки $A(-2; 0; 1)$ и $B(1; 2; 3)$;

в) точку $M_0(-3; 6; -13)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\alpha = 120^\circ$ и $\beta = 60^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(2; -1; 5)$ перпендикулярно плоскости $2x - y + 3z + 23 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 6x - 5y + 3z + 8 = 0, \\ 6x + 5y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

и плоскостью $3x - y + 4z - 2 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(7; 9; 7)$ до плоскости

$$x - 2z + 4 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 + 4z - 43 = 0$; г) $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$;

б) $x^2 + z^2 = 9$; д) $1 - x^2 - y^2 = z$;

в) $x^2 = -1 - z$; е) $x^2 + y^2 - z^2 - 16 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 12 - y^2$, $z = 0$.

Вариант № 9

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(0; 3; 2)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{-1; 3; 2\}$ и $\vec{a}_2 = \{-2; 2; -1\}$;

б) через три точки $A(-3; 4; -2)$, $B(1; -3; -1)$, $C(-1; -2; -4)$;

в) через точку $A(4; -2; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$;

г) через точку $M_0(-1; -2; 4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(1; 2; 4)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{2; 0; 4\}$;

б) две точки $A(1; 1; 3)$ и $B(-5; 3; -7)$;

в) точку $M_0(1; 1; 0)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\beta = 120^\circ$ и $\gamma = 135^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(1; -1; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x + y - 2z - 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -2t + 3 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

и плоскостью $3x + y - 5z - 2 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(8; 4; -9)$ до плоскости

$$2y - 3z + 4 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x-5}{8} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-7}{3}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 8x - 12$;

г) $x^2 + y^2 - 36z^2 = 0$;

б) $y^2 + z^2 = 9$;

д) $1 - z^2 - y^2 = x$;

в) $y^2 = -4 + z$;

е) $-x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z = 1 + x^2 + y^2$, $x = 2$, $y = 2$, $z = 15$;

б) $z = 4 - y^2$, $z = 0$, $2y = x$, $y = 0$.

Вариант № 10

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(1; 5; -3)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{-3; 2; 1\}$ и $\vec{a}_2 = \{2; 0; 4\}$;

б) через три точки $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$;

в) через точку $A(-4; 6; -3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$;

г) через точку $M_0(-5; -3; 2)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(1; 3; -2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; -4; 3\}$;

б) две точки $A(1; 3; 0)$ и $B(4; -1; 2)$;

в) точку $M_0(-6; 0; 3)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 135^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-2; 1; 3)$ перпендикулярно плоскости $x - 5y + 6z + 8 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z - 4 = 0, \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$$

и плоскостью $x + 2y - 3z - 4 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2; 0; 6)$ до плоскости

$$6x + 5y - 4z + 4 = 0 \text{ и до прямой } \frac{x+3}{6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+10}{0}.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 + z^2 = -8y - 12$;

г) $-9x^2 + y^2 + z^2 = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 1$;

д) $1 - x^2 - z^2 = y$;

в) $z^2 = y - 3$;

е) $x^2 - y^2 + z^2 - 16 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z = 4 - x^2 - y^2$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, $z = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 12 - y^2$, $z = 0$.

Вариант № 11

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(3; -2; 4)$ параллельно двум векторам

$$\vec{a}_1 = \{-3; 7; 1\}, \quad \vec{a}_2 = \{2; -3; 4\};$$

б) через три точки $A(1; 1; 2), B(2; -1; 2), C(4; 1; 4)$;

в) через точку $A(1; -5; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-4}$;

г) через точку $M_0(2; -1; 3)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят через:

а) точку $M_0(2; 4; -5)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3; 2; -2\}$;

б) две точки $A(1; -5; 2), B(-5; 1; 0)$;

в) точку $M_0(2; 3; -4)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 120° и 45° соответственно;

г) точку $M_0(1; -3; -1)$ перпендикулярно плоскости $x - 5y + 2z - 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = 2t + 3, y = t - 2, z = t + 3 \text{ и плоскостью } 2x - 6y + 14z - 1 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(5; -1; 0)$ до плоскости

$$3y - 2z + 4 = 0 \text{ и до прямой } x = 3, y = 2t + 4, z = t - 2.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

$$\text{а) } x^2 - 3z^2 + 4y^2 + 6 = 0; \quad \text{г) } x^2 + y^2 = 3 - 4z;$$

$$\text{б) } y^2 = 2x^2 + z^2; \quad \text{д) } x^2 - 4x + z^2 + 2z - 3 = 0;$$

$$\text{в) } x = y^2 - 5y; \quad \text{е) } 3y + 2\sqrt{4 + z} = 0.$$

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

$$\text{а) } z = 4 - y^2, \quad y = x^2/2, \quad z = 0; \quad \text{б) } 10x = y^2 + z^2, \quad x = 10.$$

Вариант № 12

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(-3; -1; 7)$ и прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1}$;

б) через три точки $A(1; -1; 3)$, $B(2; -5; 1)$, $C(-1; 4; -1)$;

в) через точку $A(2; -3; -7)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$;

г) через точку $M_0(3; 7; 6)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(1; -2; 7)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{5; 1; -3\}$;

б) через две точки $A(-2; 5; -3)$, $B(3; -1; 4)$;

в) через точку $M_0(1; -2; 7)$ в направлении, которое составляет с осями координат OY и OZ углы 60° и 30° соответственно;

г) через точку $M_0(3; -2; 4)$ перпендикулярно плоскости $3x - 2y - z - 12 = 0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = t + 2, y = -2t + 1, z = 3t + 1 \text{ и плоскостью } x - 4y + 2z + 14 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(0; -5; -4)$ до плоскости

$$x + 4y + 3z + 4 = 0 \text{ и до прямой } x = 5t - 3, y = t + 2, z = 1.$$

6. Определите тип и постройте поверхности:

а) $2x^2 = y^2 + z^2$;

г) $x^2 - y^2 = 8$;

б) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$;

д) $2z + 1 = x^2$;

в) $z = 3x^2 + 2y^2$;

е) $2x - 5 + \sqrt{y} = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $\sqrt{x^2 + y^2} = z$; б) $2y + z = 2$, $x^2 = y$, $z = 0$.

Вариант № 13

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(0; 2; -6)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$x - y + 2z - 1 = 0, \quad -x + y - z - 3 = 0;$$

б) через три точки $A(-1; 3; 5), B(2; -3; -7), C(2; -3; -5)$;

в) через точку $A(7; -2; 4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-5}{2}$;

г) через точку $M_0(1; -2; 4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(-6; 1; 3)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{-2; 8; 0\}$;

б) через две точки $A(9; 1; -4), B(6; -4; -9)$;

в) через точку $M_0(-6; 1; 3)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 120° и 60° соответственно;

г) через точку $M_0(5; 0; -2)$ перпендикулярно плоскости $4x + y + 7z - 2 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x - 2y + z + 4 = 0 \end{cases}$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = -4t + 1, \quad y = 3t - 1, \quad z = 2t \quad \text{и плоскостью} \quad 4x + 2y - 3z - 18 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(2; -2; -3)$ до плоскости

$$y + z + 2 = 0 \quad \text{и до прямой} \quad x = t + 1, \quad y = -t + 5, \quad z = t$$

6. Определите тип и постройте поверхности:

а) $y^2 - 4y = 3x$;

г) $x^2 - z^2 = 9$;

б) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$;

д) $z = 9 - x^2 - y^2$;

в) $y^2 = 3(x^2 + y^2)$;

е) $x + 3 = \sqrt{3 - z}$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

а) $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 1, \quad x = y = z = 0$;

б) $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x + y + z = 6, \quad z = 0$.

Вариант № 14

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(2; 3; -5)$ параллельно двум векторам

$$\vec{a}_1 = \{-3; 1; -1\}, \vec{a}_2 = \{7; 2; -3\};$$

б) через три точки $A(-1; 2; 4), B(-3; 2; 1), C(4; 6; 3);$

в) через точку $A(4; 0; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z-1}{3};$

г) через точку $M_0(7; -3; 0)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(4; 0; 3)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{7; -1; -4\};$

б) через две точки $A(1; -2; -3), B(7; 3; 1);$

в) через точку $M_0(4; 2; -1)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 120° и 45° соответственно;

г) через точку $M_0(5; -2; 1)$ перпендикулярно плоскости $y + 2z - 11 = 0.$

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases} 3x + y - z - 6 = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = 3t + 5, y = -t - 3, z = -5t + 1 \text{ и плоскостью } x - y + 4z + 4 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(0; 2; 1)$ до плоскости

$$4x - 5y - z - 7 = 0 \text{ и до прямой } x = 3t - 2, y = t + 4, z = 5t - 5.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 = 4x;$

г) $3z = 16 - x^2;$

б) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1;$

д) $z + 1 = -(x^2 + 2y^2);$

в) $(z - 2)^2 = x^2 + y^2;$

е) $x = 2 - \sqrt{y}.$

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

а) $2z = x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = 0;$

б) $x = 0, \quad y = 2x, \quad y = 1, \quad x + y + z = 3, \quad z \geq 0.$

Вариант № 15

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят через:

а) две параллельные прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-4}$ и $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{-4}$;

б) три точки $A(4; 1; 5)$, $B(1; -3; 5)$, $C(0; -5; 8)$;

в) точку $A(-1; 4; 2)$ перпендикулярно прямой

$$x = 5t + 9; \quad y = 3t; \quad z = -2t + 6;$$

г) точку $M_0(2; -1; 5)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(3; -5; 6)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; -7; -4\}$;

б) через две точки $A(-4; -1; 2)$, $B(1; 7; 5)$;

в) через точку $M_0(-5; 2; -4)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 30° и 60° соответственно;

г) через точку $M_0(5; -1; -6)$ перпендикулярно плоскости

$$4x - 6y + z - 7 = 0.$$

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = -4t - 1, \quad y = 6t - 3, \quad z = -5t + 1 \text{ и плоскостью } 3x - 2y - 5z = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(2; -1; 1)$ до плоскости

$$2x + 10y - 1 = 0 \text{ и до прямой } x = 2, \quad y = -t + 2, \quad z = t + 3.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $z^2 + y^2 = 9x$;

г) $y^2 = 9 - x$;

б) $\frac{x^2}{9} + y^2 + z^2 = 1$;

д) $y^2 + z^2 - 2z = 0$;

в) $2x^2 - z^2 = y$;

е) $z = -\sqrt{2 - y}$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

а) $z^2 = x^2 + y^2$, $5x + y = 5$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$;

б) $3x^2 + 3y^2 + 1 = z$, $z = 5 - 3x^2 - 3y^2$.

Вариант № 16

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(6; -2; 1)$ параллельно двум векторам

$$\vec{a}_1 = \{4; 1; -2\}, \vec{a}_2 = \{5; -5; -1\};$$

б) через три точки $A(1; 1; 1), B(2; 3; -4), C(1; -1; 2);$

в) через точку $A(-3; 5; 8)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{7} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z}{1};$

г) через точку $M_0(4; -1; 7)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(3; 7; -9)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{0; 1; -8\};$

б) через две точки $A(3; -2; 1), B(4; -3; -2);$

в) через точку $M_0(1; 5; -7)$ в направлении, которое составляет с

осями координат OX и OY углы 45° и 60° соответственно;

г) через точку $M_0(0; -2; -6)$ перпендикулярно плоскости $7x + z + 2 = 0.$

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0 \\ 2x - y - 3z + 6 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = 7t + 2, y = -2t - 4, z = 3t + 6 \text{ и плоскостью } -x - y + 2z - 17 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(3; -3; -1)$ до плоскости

$$2x + 4y - 3 = 0 \text{ и до прямой } x = 2t - 3, y = t + 1, z = 6t - 1.$$

6. Определите тип и постройте поверхности:

а) $x^2 + y^2 = 4y - x;$

г) $x^2 = y^2 + z^2;$

б) $y = 9 - z^2;$

д) $x^2 + y^2 + z^2 = 8z;$

в) $x = 3 - 2(y^2 + z^2);$

е) $y - 4 - 2\sqrt{z - 1} = 0.$

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 2x, x + z = 2, z = 0, (z \geq 0);$

б) $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}, x = \sqrt{y^2 + z^2}, y \geq 0.$

Вариант № 17

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(-4; -2; 5)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$2x - 2y + z - 1 = 0, \quad 4x - 3y + 2z = 0;$$

б) через три точки $A(3; 4; 1), B(-1; 1; 0), C(-2; 0; 1)$;

в) через точку $A(4; -3; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{9}$;

г) через точку $M_0(6; -3; 9)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(1; -3; 8)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{5; 0; -7\}$;

б) через две точки $A(-3; 5; 1), B(2; 1; 4)$;

в) через точку $M_0(1; -3; -7)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 120° и 60° , соответственно;

г) через точку $M_0(5; -2; 4)$ перпендикулярно плоскости $x - y + 3z - 4 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x + 5y - z - 5 = 0 \\ 2x - 5y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = 8t + 2, y = 3t - 1, z = 6t \text{ и плоскостью } 4x - 2y + z + 10 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(1; 2; -3)$ до плоскости

$$3x - y + 2z + 1 = 0 \text{ и до прямой } x = t - 3, y = 2, z = -5t - 7$$

6. Определите тип и построьте поверхности:

а) $x^2 + 9y^2 = 9z$;

г) $3z = 4 - y^2$;

б) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$;

д) $x^2 - z^2 = 4$;

в) $x^2 = z^2 + y^2$;

е) $y = -\sqrt{3 - x^2 - z^2}$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z = x^2, x + y = 6, y = 2x, z = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 4z^2, x^2 + y^2 = 2z, x = 0, y = 0, (x > 0, y > 0)$

Вариант № 18

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(2; -1; 9)$ и прямую $x = 4t + 3$; $y = -2t + 2$; $5t$;

б) через три точки $A(1; 2; -3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-2; -1; 6)$;

в) через точку $A(3; -2; -9)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-7}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+2}{-1}$;

г) через точку $M_0(-5; 4; 6)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(4; -6; 5)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; -5; 0\}$;

б) через две точки $A(2; -7; 1)$, $B(3; -4; 2)$;

в) через точку $M_0(1; -4; 6)$ в направлении, которое составляет с осями координат OY и OZ углы 45° и 120° соответственно;

г) через точку $M_0(3; -2; 1)$ перпендикулярно плоскости

$$5x - 3y + 4z + 2 = 0.$$

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases} 6x - 5y - 4z - 2 = 0 \\ x + 7y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = 4t + 2, y = -t - 5, z = 5t + 1 \text{ и плоскостью } 3x - 2y + 2z + 6 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(7; -4; 2)$ до плоскости

$$x + 5y + 2z + 6 = 0 \text{ и до прямой } x = 2t - 3, y = -3t + 1, z = -2.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + z^2 = y^2$;

г) $x^2 + y^2 = 8 - 2z$;

б) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} + z^2 = 12$;

д) $x - 4 = y^2$;

в) $6 = 3x^2 + 2z^2$;

е) $z = 3\sqrt{y} - 3$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

а) $x = \sqrt{y/2}$, $x + y = 3$, $z = 0$, $z = 2$, $x = 0$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант № 19

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через точку $M_0(-7; 1; -4)$ параллельно двум векторам

$$\vec{a}_1 = \{5; 6; -3\}, \vec{a}_2 = \{3; -5; -1\};$$

б) через три точки $A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6);$

в) через точку $A(-5; 4; -8)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-2}{3};$

г) через точку $M_0(12; -7; -1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(-2; 3; -4)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{1; -5; -8\};$

б) через две точки $A(7; -1; 3), B(4; 1; -2);$

в) через точку $M_0(3; -1; 0)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 30° и 60° соответственно;

г) через точку $M_0(2; -6; 4)$ перпендикулярно плоскости

$$2x + 3y + 5z - 3 = 0.$$

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases} 8x - y - 3z - 1 = 0 \\ x + y + z + 10 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = t + 5, y = 3t - 6, z = t + 2 \text{ и плоскостью } 5x - 4y - 5z - 3 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(4; -1; 2)$ до плоскости

$$x - 3y - 3z + 4 = 0 \text{ и до прямой } x = -t - 2, y = t + 5, z = 2t + 3.$$

6. Определите тип и постройте поверхности:

а) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 2z = 0;$

г) $x^2 + 2y^2 = z^2;$

б) $1 - y = x^2/2 + z^2/4;$

д) $z^2 = 4 - 2x;$

в) $y^2 + z^2 = 6z;$

е) $2z - 1 + 3\sqrt{x+4} = 0.$

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z = 16 - x^2 - y^2, x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$

б) $x^2 + y^2 - z^2 = -1, x^2 + y^2 = 1.$

Вариант № 20

1. Составьте уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через две параллельные прямые $x = t - 1$; $y = 2t + 5$; $z = 3t + 2$ и $x = t + 3$; $y = 2t - 2$; $z = 3t + 6$;

б) через три точки $A(1; 5; -7)$, $B(-3; 6; 3)$, $C(-2; 7; 3)$;

в) через точку $A(1; -1; 2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{5}$;

г) через точку $M_0(5; -3; 2)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(3; -5; 6)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{2; 1; -7\}$;

б) через две точки $A(-1; 3; 4)$, $B(2; -4; 3)$;

в) через точку $M_0(5; 0; -1)$ в направлении, которое составляет с осями координат OY и OZ углы 60° и 135° соответственно;

г) через точку $M_0(-1; 5; -3)$ перпендикулярно плоскости

$$7x - y + 4z + 4 = 0$$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x + 5y + 2z + 11 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$x = -5t + 2, y = 7t - 4, z = 2t + 6 \text{ и плоскостью } x - 2y + 4z - 1 = 0.$$

5. Определите расстояния от точки $M_1(-5; -3; 2)$ до плоскости

$$x + y - 2z + 2 = 0 \text{ и до прямой } x = 1, y = -3t + 5, z = 2t - 7.$$

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + z^2 = 2z$;

г) $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$;

б) $z = -\left(\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4}\right)$;

д) $y^2 - 4y + z = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0$;

е) $z = 3 + \sqrt{2 - x}$;

7. Постройте области, ограниченные поверхностями

а) $z = 4 - y^2$, $z = 2 + y^2$, $x = -1$, $x = 2$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$.

4.2.8. Решение типового варианта и образец оформления

Индивидуальное задание № 4

Вариант № 0

Задача 1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(2; -4; 3)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{2; 3; 1\}$ и $\vec{a}_2 = \{-1; 3; 4\}$;

б) через три точки $A(3; -1; 2)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$;

в) через точку $A(1; 4; -3)$ перпендикулярно прямой $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{5}$;

г) через точку $M_0(-2; 0; 5)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

Решение

а) Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Координаты точки, через которую проходит искомая плоскость, даны в условии задачи – это точка $M_0(2; -4; 3)$. В качестве нормального (перпендикулярного) вектора плоскости можно взять векторное произведение векторов $\vec{a}_1 = \{2; 3; 1\}$ и $\vec{a}_2 = \{-1; 3; 4\}$.

Находим

$$\vec{N} = [\vec{a}_1; \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(12 - 3) - \vec{j}(8 + 1) + \vec{k}(6 + 3) = 9\vec{i} - 9\vec{j} + 9\vec{k} = \{9; -9; 9\}.$$

Подставляем координаты точки $M_0(2; -4; 3)$ и координаты вектора $\vec{N} = \{9; -9; 9\}$ в уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Получаем

$$9(x - 2) - 9(y - (-4)) + 9(z - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 2) - (y + 4) + (z - 3) = 0 \Rightarrow x - 2 - y - 4 + z - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x - y + z - 9 = 0.$$

б) Запишем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим в это уравнение координаты точек $A(3; -1; 2)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$. Получаем

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-(-1) & z-2 \\ 4-3 & 1-(-1) & -2-2 \\ 6-3 & 3-(-1) & 7-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разлагая его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = (x-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - (y+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3) \cdot (10+16) - (y+1) \cdot (5+12) + (z-2) \cdot (4-6) =$$

$$= 26(x-3) - 17(y+1) + (-2)(z-2) = 26x - 78 - 17y - 17 - 2z + 4 =$$

$$= 26x - 17y - 2z - 91.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости имеет вид

$$26x - 17y - 2z - 99 = 0.$$

в) Искомая плоскость перпендикулярна прямой $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{5}$, следовательно, она перпендикулярна и направляющему вектору этой прямой $\vec{s} = \{-3; -4; 5\}$. Поэтому в качестве нормального вектора плоскости можно взять вектор $\vec{s} = \{-3; -4; 5\}$.

Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Подставляем в это уравнение координаты точки $A(1; 4; -3)$ и координаты вектора $\vec{N} = \vec{s} = \{-3; -4; 5\}$. Получаем

$$-3(x-1) - (-4)(y-4) + 5(z-(-3)) = 0 \Rightarrow$$

$$-3(x-1) + 4(y-4) + 5(z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$-3x + 3 + 4y - 16 + 5z + 15 = 0 \Rightarrow -3x + 4y + 5z + 2 = 0.$$

Искомая плоскость имеет уравнение $3x - 4y - 5z - 2 = 0$.

г) Запишем уравнение плоскости «в отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

По условию задачи искомая плоскость отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки, следовательно, $a = b = c$. Тогда уравнение плоскости принимает вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \Rightarrow x + y + z = a.$$

Так как плоскость проходит через точку $M_0(-2; 0; 5)$, координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости, т.е. имеем тождество $(-2) + 0 + 5 = a$,

откуда находим $a = 3$.

Подставляем найденное значение $a = 3$ в уравнение плоскости. Получаем

$$x + y + z = 3 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0.$$

Задача 2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(-5; 4; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{5; 1; -2\}$;

б) две точки $A(0; 5; -3)$ и $B(1; 2; 4)$;

в) точку $M_0(-4; 3; 0)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(2; -5; 3)$ перпендикулярно плоскости $2x + y - 2z - 1 = 0$.

Решение

а) Запишем уравнения прямой в каноническом виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка на прямой, а $\vec{s} = \{m; n; p\}$ – направляющий (параллельный) вектор прямой.

Подставляем данные задачи, координаты точки $M_0(-5; 4; 2)$ и координаты вектора $\vec{a} = \{5; 1; -2\}$

$$\frac{x - (-5)}{5} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2} \Rightarrow \frac{x + 5}{5} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}.$$

б) Запишем уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Подставляем координаты заданных точек $A(0; 5; -3)$ и $B(1; 2; 4)$

$$\frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 5}{2 - 5} = \frac{z - (-3)}{4 - (-3)} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z + 3}{7}.$$

в) По условию задачи искомая прямая проходит через точку $M_0(-4; 3; 0)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, соответственно. Следовательно, направляющий вектор этой прямой $\vec{s}$ параллелен вектору $\{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$.

Значение $\cos \gamma$ найдём из основного свойства направляющих косинусов вектора

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Имеем

$$\cos^2(60^\circ) + \cos^2(45^\circ) + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \vec{s} \parallel \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2} \right\} \text{ или } \vec{s} \parallel \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2} \right\}.$$

Записываем координаты направляющего вектора искомой прямой

$$\vec{s} = \{1; \sqrt{2}; 1\} \text{ или } \vec{s} = \{1; \sqrt{2}; -1\}.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две прямые

$$\frac{x + 4}{1} = \frac{y - 3}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1} \text{ и } \frac{x + 4}{1} = \frac{y - 3}{\sqrt{2}} = \frac{z}{-1}.$$

г) Если прямая перпендикулярна плоскости, то направляющий вектор прямой совпадает с вектором нормали плоскости. Из уравнения данной плоскости $2x + y - 2z - 1 = 0$ находим координаты нормального вектора $\vec{N} = \{2; 1; -2\}$. Записываем канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2; -5; 3)$ параллельно вектору $\vec{s} = \vec{N} = \{2; 1; -2\}$

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - (-5)}{1} = \frac{z - 3}{-2} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y + 5}{1} = \frac{z - 3}{-2}.$$

Задача 3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x - y + 2z - 20 = 0, \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ получите её канонические и параметрические уравнения.

Решение

Чтобы записать канонические или параметрические уравнения прямой, необходимо знать координаты точки на прямой и координаты направляющего вектора этой прямой.

По условию задачи прямая задана как линия пересечения двух плоскостей $x - y + 2z - 20 = 0$ и $2x + y - 2z - 1 = 0$.

По общим уравнениям этих плоскостей можно записать их векторы нормалей:

$$x - y + 2z - 20 = 0 \Rightarrow \vec{N}_1 = \{1; -1; 2\},$$

$$2x + y - 2z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{N}_2 = \{2; 1; -2\}.$$

Векторы нормалей $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны искомой прямой, образованной пересечением плоскостей. Следовательно, её направляющий вектор может быть найден как векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{s} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (2 - 2)\vec{i} - (-2 - 4)\vec{j} + (1 + 2)\vec{k} = 6\vec{j} + 3\vec{k} = \{0; 6; 3\}. \end{aligned}$$

Определим точку, лежащую на прямой. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 2z - 20 = 0, \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

при $z = 0$.

Получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 20, \\ 2x + y = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x - y = 20, \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - (1 - 2x) = 20, \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 21, \\ y = 1 - 2x \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} x = 7, \\ y = 1 - 2x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = -13 \end{cases}. \end{aligned}$$

Таким образом, точка, лежащая на данной прямой, имеет координаты

$$x = 7, \quad y = -13, \quad z = 0.$$

Записываем канонические уравнения прямой $\frac{x-7}{0} = \frac{y+13}{6} = \frac{z}{3}$

и параметрические уравнения $\begin{cases} x = 7, \\ y = -13 + 6t, \\ z = 3t. \end{cases}$

Задача 4. Найдите точку пересечения и угол между прямой $\begin{cases} x = 6t + 1, \\ y = t + 3, \\ z = 3t - 5 \end{cases}$ и

плоскостью $3x - 2y + 5z - 3 = 0$.

Решение

Сначала найдём точку пересечения данной прямой и данной плоскости. Для этого $x = 6t + 1$, $y = t + 3$ и $z = 3t - 5$ подставим в уравнение плоскости $3x - 2y + 5z - 3 = 0$. Получаем

$$3(6t + 1) - 2(t + 3) + 5(3t - 5) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$18t + 3 - 2t - 6 + 15t - 25 - 3 = 0 \Rightarrow 31t - 31 = 0 \Rightarrow 31t = 31 \Rightarrow t = 1.$$

Из уравнений прямой

$$\begin{cases} x = 6t + 1, \\ y = t + 3, \\ z = 3t - 5 \end{cases}$$

находим значения координат x , y и z , соответствующие значению параметра $t = 1$:

$$x = 6 \cdot 1 + 1 = 7,$$

$$y = 1 + 3 = 4,$$

$$z = 3 \cdot 1 - 5 = -2.$$

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются в точке $M(7; 4; -2)$.

Угол α между прямой и плоскостью найдём по формуле

$$\sin \alpha = \frac{(\vec{N}, \vec{s})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|},$$

где $\vec{N}$ – нормальный вектор плоскости, $\vec{s}$ – направляющий вектор прямой.

Из уравнений прямой и плоскости выписываем

$$\vec{N} = \{3; -2; 5\}, \vec{s} = \{6; 1; 3\}.$$

Тогда

$$\sin \alpha = \frac{3 \cdot 6 + (-2) \cdot 1 + 5 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{6^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{18 - 2 + 15}{\sqrt{9 + 4 + 25} \cdot \sqrt{36 + 1 + 9}} =$$

$$= \frac{31}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{46}} = \frac{31}{\sqrt{38 \cdot 46}} = \frac{31}{\sqrt{1748}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{31}{\sqrt{1748}}\right).$$

Задача 5. Определите расстояния от точки $M(-1; 5; 0)$ до плоскости $2x - 3y - 5 = 0$ и до прямой $\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+4}{1}$.

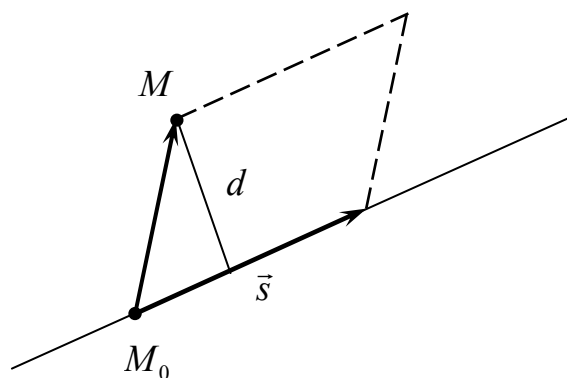
Решение

Расстояние d_1 от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, найдём по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Получаем

$$d_1 = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-2 - 15 - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{22}{\sqrt{13}}.$$



Расстояние от точки M до прямой будем рассматривать как длину высоты параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$, где $M_0(2; 5; -4)$ – точка на заданной прямой, $\vec{s} = \{0; 2; 1\}$ – направляющий вектор прямой. Тогда

$$d = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{s} \right] \right|}{|\vec{s}|}.$$

Находим векторное произведение, учитывая

$$\overrightarrow{M_0M} = \{-1 - 2; 5 - 5; 0 - (-4)\} = \{-3; 0; 4\}$$

$$\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{s} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (0-8)\vec{i} - (-3-0)\vec{j} + (-6-0)\vec{k} = -8\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k} = \{-8; 3; -6\}.$$

Находим модули векторов

$$\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{s} \right] = \sqrt{(-8)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 9 + 36} = \sqrt{109},$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Подставляя найденные значения в формулу $d = \frac{\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{s} \right]}{|\vec{s}|}$, находим расстояние от точки M до прямой $\frac{x-2}{0} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+4}{1}$

$$d = \frac{\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{s} \right]}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{109}}{\sqrt{5}}.$$

Задача 6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 - 8y + z^2 = 0$;

з) $z = 1 + y^2$;

б) $x^2 + y^2 = 25$;

д) $x^2 + y^2 = z + 3$;

в) $x^2 + y^2 = z^2$;

е) $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Решение

а) Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 - 8y + z^2 = 0$ к каноническому виду

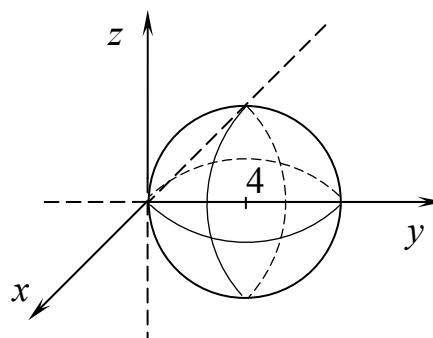
$$x^2 + (y^2 - 8y) + z^2 = 0;$$

$$x^2 + (y^2 - 8y + 4^2 - 4^2) + z^2 = 0;$$

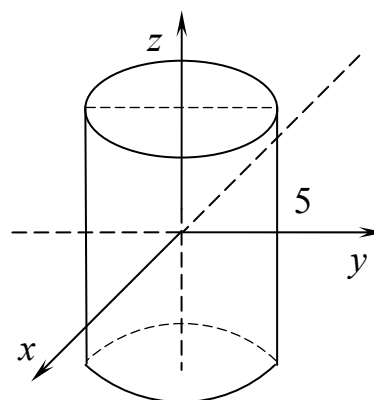
$$x^2 + (y - 4)^2 - 16 + z^2 = 0;$$

$$x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 16.$$

Получили каноническое уравнение сферы с центром в точке $C(0; 4; 0)$ и радиусом $R = 4$.



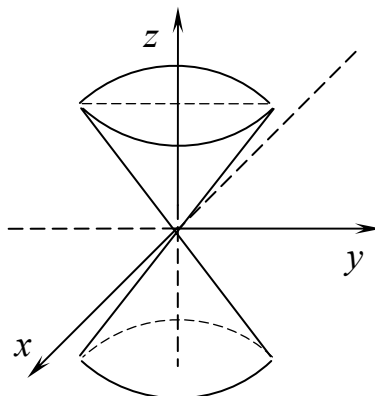
б) В данном уравнении $x^2 + y^2 = 25$ отсутствует переменная z . Поэтому заключаем, что оно определяет цилиндрическую поверхность, а именно, определяет круговой цилиндр. Образующие этого цилиндра параллельны оси Oz , а направляющей является окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 5$.



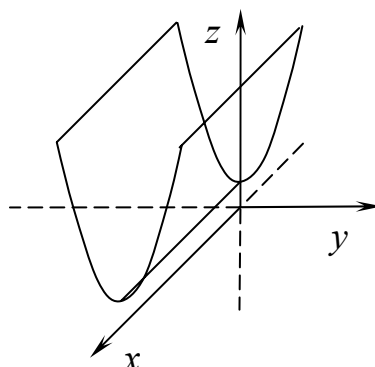
в) Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ к каноническому виду

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Это уравнение определяет конус с вершиной в начале координат и осью симметрии – осью Oz .



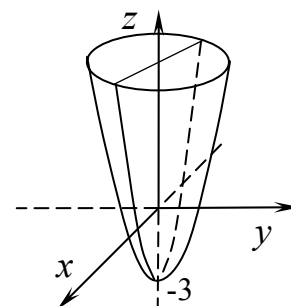
г) В данном уравнении $z = 1 + y^2$ отсутствует координата x , следовательно, оно определяет в пространстве цилиндрическую поверхность – параболический цилиндр. Образующие этого цилиндра параллельны оси Ox , а направляющей является парабола.



д) Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 = z + 3$ к каноническому виду

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}(z + 3).$$

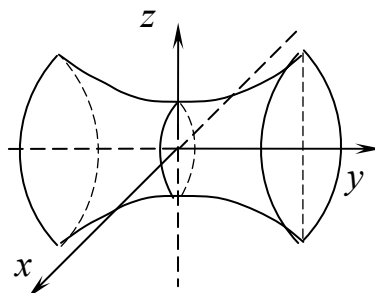
По каноническому виду определяем тип поверхности – это эллиптический параболоид с вершиной в точке $(0; 0; -3)$.



е) Преобразуем уравнение $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$ к каноническому виду

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Уравнение определяет однополостный гиперболоид с осью симметрии Oy .



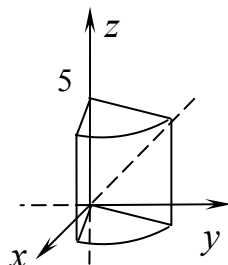
Задача 7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 4$, $y - 2x = 0$, $2y - x = 0$, $z = 0$, $z = 1$;

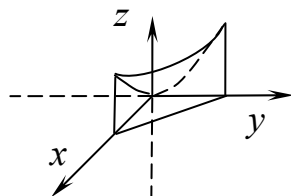
б) $x^2 + y^2 = z$, $x + y = 1$.

Решение

а) $x^2 + y^2 = 4$, $y - 2x = 0$, $2y - x = 0$, $z = 0$, $z = 5$;



б) $x^2 + y^2 = z$, $x + y = 1$.



5. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи зачёта

К зачёту допускаются только те студенты, у которых сданы и зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, обучающиеся по КЗФ, сдают зачёт во время зимней экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме). Каждый билет содержит несколько типовых задач (по усмотрению преподавателя от 5 до 10). Зачёт считается сданным, если выполнено не менее 60 % заданий билета.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, сдают зачёт в тестовой форме (on-line режим). Зачётный тест содержит 20 тестовых заданий различного уровня сложности. Структура теста представлена в таблице:

Тип задания	Количество в тесте	Уровень сложности
Задание на выбор единственного ответа	8	1
Задание на выбор множественных ответов	4	2
Задание на установление последовательности	4	2
Задание на установление соответствия	2	3
Задание для краткого ответа	2	3

Зачёт выставляется по сумме набранных баллов за задания теста и по результатам сдачи индивидуальных домашних заданий.

5.2. Образцы билетов к зачёту для КЗФ

Билет № 0

1. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

2. Найдите внутренние углы треугольника с вершинами в точках

$$A(-4, 2, 2), B(2, -1, -1), C(2, 0, -2).$$

3. Даны уравнения двух сторон прямоугольника $ABCD$ $AD: 5x + 2y - 7 = 0$, $BC: 5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение диагонали $AC: 3x + 7y - 10 = 0$. Составьте уравнение стороны AB .

4. Докажите перпендикулярность двух прямых

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \text{ и } l_2: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

5. Приведите уравнение кривой к каноническому виду, назовите и постройте кривую

$$y = 4 - \sqrt{6 + 2x}.$$

6. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{2; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{1; 0; -2\}$, образует тупой угол с осью Ox и $|\vec{x}| = 2$.

7. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

5.3. Образцы билетов к зачёту для ДОТ

Билет № 0

Задания на выбор единственного ответа

Задание 1. Укажите верное соотношение, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $A = B$; 2. $A > B$; 3. $A < B$; 4. $A \neq B$.

Ответ:

Задание 2. Прямая $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ перпендикулярна плоскости $nx - y + 2z + 1 = 0$ при n , равном...

- 1) 1; 2) 5; 3) -5; 4) -1.

Ответ:

Задание 3. Уравнение $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ определяет в пространстве в декартовой системе координат

1. эллипс;
2. эллипсоид;
3. эллиптический параболоид;

4. эллиптический цилиндр.

Ответ:

Задание 4. Угол между единичными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60° , тогда длина вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равна

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $2\sqrt{2}$ 4. $3\sqrt{3}$ 5. $\sqrt{6}$

Ответ:

Задание 5. Найти векторное произведение $[\vec{a}, \vec{c}]$, если $\vec{a} = \{2; 3; 0\}$, $\vec{b} = \{0; 3; 7\}$, $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$

1) $\{6; 3; 7\}$

2) $\{21; -1; 6\}$

3) $\{0; 5; 7\}$

4) $\{0; 12; 7\}$

5) $\{0; 12; 5\}$

Ответ:

Задание 6. Уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2; 0; -1)$ параллельно плоскости $3x - y + 2z - 7 = 0$ имеет вид

1. $3x - y + 2z - 4 = 0$

2. $x + y - z - 3 = 0$

3. $3x - y + 2z + 1 = 0$

4. $x + y - z + 3 = 0$

Ответ:

Задание 7. Запишите систему двух линейных уравнений с двумя неиз-

вестными x_1 и x_2 , если $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$

1. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = -3 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$

Ответ:

Задание 8. Уравнение линии $x^2 + y^2 = 2x$ имеет в полярной системе координат вид

1. $\rho^2 = 2 \sin \varphi$; 2. $\rho = 2 \cos \varphi$; 3. $\rho = 2 \sin \varphi$; 4. $\rho^2 = 2 \cos \varphi$

Ответ:

Задания на выбор множественных ответов

Задание 9. Расширенная матрица $\tilde{A}$ системы линейных уравнений эквивалентна матрице

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 1 \end{array} \right)$. Тогда

1. $r(A) = 1$;
2. $r(A) = 2$;
3. $r(\tilde{A}) = 1$;
4. $r(\tilde{A}) = 2$;
5. система несовместна;
6. система совместна.

Ответ:

Задание 10. Путём элементарных преобразований над строками матрица однородной системы линейных уравнений приведена к виду

$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. В качестве базисного выбран минор $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Тогда фундаментальная система решений состоит из решений

1. $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$
2. $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$
3. $X_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};$
4. $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

Ответ:

Задание 11. Даны векторы $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 2\}$, $\vec{d} = \{4; -2; 0\}$. Линейно независимыми являются

1. $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 2\}$, $\vec{d} = \{4; -2; 0\}$;
2. $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 2\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$;
3. $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{d} = \{4; -2; 0\}$;
4. $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 2\}$.

Ответ:

Задание 12. Прямая $4x + 2y - 1 = 0$ параллельна прямой

1. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2}$;
2. $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \end{cases}$
3. $y = 2x + 1$;
4. $2x + y - 1 = 0$.

Ответ:

Задания на установление последовательности

Задание 13. С помощью элементарных преобразований над строками

матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ приведена к ступенчатому виду

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Укажите последовательность выполненных опера-

ций

1. выбор ведущего элемента $a_{22} = 1$
2. формирование элементов первого столбца
3. выбор ведущего элемента $a_{11} = 1$
4. формирование элементов первого столбца
5. проверка ступенчатого вида матрицы после формирования второго столбца
6. проверка ступенчатого вида матрицы после формирования первого столбца

Ответ:

Задание 14. Расположите значения алгебраических дополнений матри-

цы $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ в следующей последовательности $A_{13}, A_{23}, A_{32},$

A_{31}

1. 7
2. 1
3. 5
4. 3
5. -1
6. -5
7. -3

Ответ:

Задание 15. Расположите векторы по возрастанию их модулей

- 1) $\vec{b} = \{1; -3; 2\};$
- 2) $\vec{b} = \{1; 3; 0\};$
- 3) $\vec{b} = \{1; 0; 2\};$
- 4) $\vec{b} = \{0; 3; 2\};$

Ответ:

Задание 16. Расположите прямые по убыванию их угловых коэффициентов

1. $2x - y + 3 = 0;$
2. $2x + y - 3 = 0;$
3. $x - 2y + 3 = 0;$
4. $x + 2y + 3 = 0.$

Ответ:

Задания на установление соответствия

Задание 17. Установите соответствие между уравнениями прямых и направляющими векторами этих прямых

- | | |
|---|---------------------|
| 1) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$ | A $\{1; 3; 5\}$ |
| | B $\{-11; 17; 13\}$ |
| 2) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ | C $\{10; 2; 11\}$ |
| | D $\{9; 5; 1\}$ |

$$3) \begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -3 \\ z = -2t + 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} E \{0; 7; 3\} \\ F \{2; 0; -2\} \end{matrix}$$

$$4) \frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$$

Ответ:

Задание 18. Установите соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями:

- | | |
|---------------|-----------------------|
| 1. парабола | A. $2x^2 + 2y^2 = 5$ |
| 2. окружность | B. $3x^2 + 3y^2 = -5$ |
| 3. эллипс | C. $2x^2 - 3y^2 = 5$ |
| 4. гипербола | D. $3x^2 + 2y^2 = 5$ |
| | E. $x + y^2 = 5$ |
| | F. $2x^2 - 3y^2 = 0$ |

Ответ:

Задания для краткого ответа

Задание 19. Вычислите определитель четвёртого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Ответ:

Задание 20.

Даны три вектора $\vec{a} = \{2; -1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; 0; 2\}$, $\vec{c} = \{3; 2; -4\}$. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ответ:

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Терехина Л.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс. – Томск, 1998. – 216 с.
2. Апатенок Р.Ф. Элементы линейной алгебра и аналитической геометрии: учеб. пособие. Изд. 2-е. / Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В., Хейнман В.Б. – Минск: Выш. шк. 1986. – 272 с.
3. Краснов М.Л. Вся высшая математика: учебник. Изд. 2-е. / Краснов М.Л. [и др.]. – М.: Едиториал УРСС, 2003. Т. 1. – 328 с.

6.2. Литература дополнительная

4. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / Д.В. Беклемишев. – 8-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2000. – 376 с.

6.3. Учебно-методические пособия

5. Арефьев К.П. Системы линейных уравнений: учеб. пособие / Арефьев К.П., Ивлев Е.Т., Тарбокова Т.В. – Томск: Изд. ТПУ, 1996.
6. Арефьев К.П. Векторная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. пособие / Арефьев К.П., Ивлев Е.Т., Тарбокова Т.В. – Томск: Изд. ТПУ, 1996.
7. Арефьев К.П. Высшая математика. Ч.I: Руководство к решению задач: учеб. пособие. / Арефьев К.П., Нагорнова А.И., Столярова Г.П., Харлова А.Н. – Томск: Изд. ТПУ, 2000.

6.4. Internet-ресурсы

8. Сайт ТПУ. – Режим доступа: <http://www.tpu.ru>, вход свободный.

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

**РОЖКОВА Валентина Ивановна
МОЛДОВАНОВА Евгения Александровна**

Рецензент

*кандидат физ.-мат. наук,
доцент кафедры ВМ ФТИ*

О.Н. Имас

Редактор *С.В. Ульянова*

Компьютерная верстка *Е.А. Молдованова*

**Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинал-макета**

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать Херох. Усл.печ.л. 8,14. Уч.-изд.л. 7,37.

Заказ . Тираж экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru